

DIE TRIPEL-KORRELATION

ANWENDUNGEN IN DER ASTRONOMISCHEN
SPECKLE-INTERFEROMETRIE
UND IN DER SIGNALVERARBEITUNG

von

BERNHARD WIRNITZER

aus Nürnberg

Diss. Erlangen
1983

DIE TRIPEL-KORRELATION

ANWENDUNGEN IN DER ASTRONOMISCHEN
SPECKLE-INTERFEROMETRIE
UND IN DER SIGNALVERARBEITUNG

Den Naturwissenschaftlichen Fakultäten
der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg
zur Erlangung des Doktorgrades

vorgelegt von

BERNHARD WIRNITZER

aus Nürnberg

Als Dissertation genehmigt von den Naturwissenschaftlichen
Fakultäten der Universität Erlangen-Nürnberg.

Tag der mündlichen Prüfung	: 17.5.84
Vorsitzender der Prüfungskommission	: Prof. Dr. K. Jacobs
Erstberichterstatter	: Prof. Dr. A.W. Lohmann
Zweitberichterstatter	: Prof. Dr. F. Durst

V O R W O R T

Ziel dieser Dissertation ist es, das Konzept der Tripel-Korrelation in der Bild- und Signalverarbeitung vorzustellen. Die Tripel-Korrelation ist wesentlich weniger verbreitet als Korrelationen zweiter Ordnung, wie zum Beispiel die Autokorrelation. Doch in vielen Fällen läßt sich durch den Schritt zur Korrelation dritter Ordnung wertvolle neue Information gewinnen. Wesentliche Schlüsselworte sind: Modulus- und Phaseninformation; geringe Empfindlichkeit gegen Rauschen.

Die Arbeit beginnt mit einer konkreten Aufgabe, nämlich der Abbildung durch die turbulente Erdatmosphäre. Durch dieses Beispiel werden intuitiv die Vorteile einer Bild- und Signalverarbeitung mit Tripel-Korrelationen aufgezeigt. Die Formulierungen in diesem Beispiel in Kapitel 2 sind problemorientiert. Das allgemeine Konzept folgt in Kapitel 3. Es ist möglich Kapitel 3 vor Kapitel 2 zu lesen. In den Kapiteln 4-6 finden sich weitere, sehr unterschiedliche Anwendungen der Tripel-Korrelation und des fourieranalogen Bisppektrums. Da das gemeinsame Konzept dieser Projekte gezeigt werden soll, treten die genauen technischen Details der Einzelprojekte in den Hintergrund. Sie sind im Anhang erläutert.



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546214_0082

Inhaltsverzeichnis

KAPITEL 1 EINLEITUNG

1.1 Motivation	7
1.2 Die Tripel-Korrelation und das Bispektrum - Definition der Begriffe und elementare Eigenschaften	12
1.3 Kapitelübersicht	12

KAPITEL 2 DIE TRIPEL-KORRELATION IN DER ASTRONOMISCHEN SPECKLE-INTERFEROMETRIE

2.1 Labeyries Speckle-Interferometrie	15
2.2 Speckle-Holographie	20
2.3 Speckle-Masking	22
2.3.1 Ein allgemeines Konzept	24
2.3.2 Der Einfluß von Photonenrauschen in den Rohdaten	31
2.4 Ein Vergleich mit anderen Methoden	34
2.4.1 Fienups Algorithmus	35
2.4.2 Der Knox-Thomson Algorithmus	35
2.4.3 Ein Vergleich	37

KAPITEL 3 DIE TRIPEL-KORRELATION UND DAS BISPEKTRUM

3.1 Definitionen und Eigenschaften	40
3.2 Der Einfluß von Rauschen, Untergrund und Nichtlinearität	41

3.3.3	Rekonstruktion eines Signals aus seiner Tripel-Korrelation	45
3.3.1	Prinzipielle Grenzen	46
3.3.2	Eine plausible Erklärung	47
3.3.3	Ein mathematischer Beweis	48
3.3.4	Rekursive Signalrekonstruktion	49
KAPITEL 4	MESSUNG ULTRAKURZER LASERPULSE - EIN VORSCHLAG	54
KAPITEL 5	ANDERE PROJEKTE MIT TRIPEL-KORRELATIONEN UND BISPEKTREN	58
5.1	Anwendungen	59
5.1.1	Gamos Tripel-Intensitäts-Interfero- meter und verwandte Projekte	59
5.1.2	Satos Geschwindigkeitsmessungen mit Bispektren	62
5.1.3	Holographie mit Bispektren	62
5.1.4	Detektion von Nichtlinearitäten mit Bispektren	64
5.2	Methoden zur Berechnung von Tripel-Korre- lationen	65
KAPITEL 6	ZWEI PROJEKTSKIZZEN	
6.1	Verschiebungsinvariante Abbildung bei extrem schwachen Lichtintensitäten - eine Projektskizze	67
6.2	Spektrogramme höherer Ordnung von musikalischen Tönen	70

ANHANG	SPECKLE MASKING - DETAILS UND AUSBLICK	74
	1. Kompensation der Speckle-Masking- Transferfunktion	74
	2. Einfluß des Photonenrauschens	75
	3. Ausblick	83
LITERATURVERZEICHNIS		85
ZUSAMMENFASSUNG		93
LEBENS LAUF		96
NACHWORT		97

K A P I T E L 1

E I N L E I T U N G

1.1 Motivation

In dieser Arbeit werden verschiedene Anwendungen und einige Grundlagen der Signal- und Bildverarbeitung mit Tripel-Korrelationen vorgestellt. Die (Auto-) Tripel-Korrelation ist eine Verallgemeinerung der vielleicht bekannteren Autokorrelation. Die ursprüngliche Motivation für diese Dissertation war das Problem der Abbildung durch die turbulente Erdatmosphäre, oder genauer das Phasenproblem der astronomischen Speckle-Interferometrie.

Das Problem der astronomischen Abbildung durch die turbulente Erdatmosphäre hat eine Vorgeschichte. Seit langem war den Astronomen bekannt, daß das theoretische Auflösungsvermögen eines großen Teleskops mit einem Spiegeldurchmesser von 3,6 Metern 0,03 Bogensekunden beträgt. Trotzdem waren ihre Langzeitaufnahmen ungefähr 30 mal unschärfer und hatten eine Auflösung von nur etwa einer Bogensekunde (Fig. 1). Der Grund hierfür sind die Turbulenzen in der Erdatmosphäre.

Die durchbrechende Erfindung zur Lösung dieses Problems gelang 1970 dem Franzosen A. Labeyrie mit seiner astronomischen Speckle-Interferometrie /1/. Labeyrie hatte erkannt, daß sich die beugungstheoretisch scharfe Autokorrelation des Objektes,

aus der gemittelten Autokorrelation vieler Kurzzzeitaufnahmen gewinnen läßt. Die Kurzzzeitaufnahmen werden auch Speckle-Interferogramme genannt.

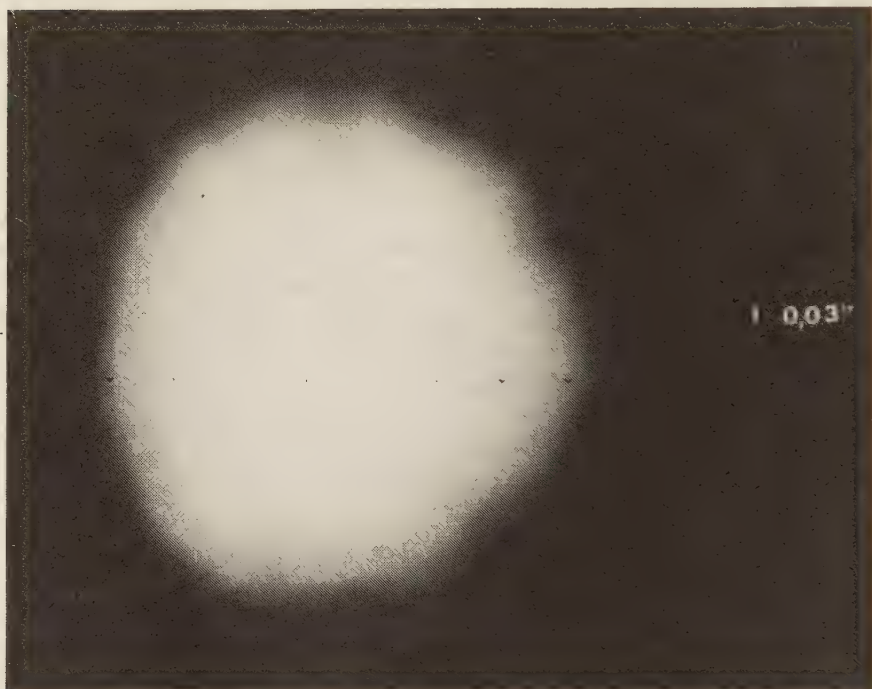


Fig. 1 Die Langzeitaufnahme eines engen Doppelsternes. Wegen der Turbulenzen in der Erdatmosphäre ist der Doppelstern nicht aufgelöst. Rechts daneben das theoretische Auflösungsvermögen des verwendeten Teleskopes. Bilder mit dieser hohen theoretischen Auflösung kann eine Bildverarbeitung mit Tripel-Korrelationen liefern.
(Aufnahme: G.Weigelt)

Nach Labeyries faszinierender Erfindung stimulierte folgende Fragestellung zahlreiche Autoren: "Ist es möglich aus einem Satz von Kurzzeitaufnahmen, echte beugungstheoretisch scharfe Bilder beliebiger Objekte zu gewinnen, statt Autokorrelationen wie in der Speckle-Interferometrie?"

Verschiedene Methoden wurden entwickelt um die gestellte Aufgabe zu lösen /3-23/ (siehe Kap.2). Aufbauend auf der Grundidee der Speckle-Holographie /2-6/ und der Speckle-Masking-Methode /4/ fanden wir eine allgemeine, rauschunempfindliche Lösung des Problems mit Hilfe von Tripel-Korrelationen. Die entwickelten Algorithmen lieferten echte, beugungstheoretisch scharfe Bilder mit einer Auflösung von 0,03 Bogensekunden. Die Algorithmen sind auf beliebige Objekte anwendbar.

Während wir uns mit dem Problem der Bildrekonstruktion aus astronomischen Speckle-Interferogrammen beschäftigten, wurde uns deutlich, daß die Tripel-Korrelation ein allgemein interessantes Konzept in der Signal- und Bildverarbeitung darstellt. Wir fanden, daß die Tripel-Korrelation und deren Fouriertransformierte, das Bispektrum, bereits auf anderen Gebieten erfolgreich verwendet worden war /22-63/.

Einige Autoren hatten Tripel-Projekte vorgeschlagen, die oft wenig Beachtung fanden. Zum Beispiel hatte Jennison bereits 1958 eine Tripel-Version des Michelson-Interferometers erfunden. Sein Vorschlag erschien experimentell schwierig und geriet in Vergessenheit. Über zwanzig Jahre nach Jennisons Arbeit wurde das Tripel-Interferometer erneut erfunden. Heute ist dieses Konzept eine wichtige Grundlage für moderne Methoden in der Radioastronomie (für einen Überblick siehe Ref. /27-29/).

Ein anderes Beispiel ist H. Gamos Tripel-Version des bekannten Hanbury Brown und Twiss Interferometers /25,26/. Gamos Tripel-Intensitäts-Interferometer liefert Modulus- und Phaseninformation der Kohärenzfunktion (siehe Kap.3). Weitere Anwendungen der Tripel-Korrelation und deren Fouriertransformierten, dem Bispektrum, finden sich in mehreren Veröffentlichungen von T. Sato /31-43/. In diesen Arbeiten werden häufig akustische Signale verarbeitet. So konnte zum Beispiel beginnender Verschleiß an Maschinen mit Hilfe des Bispektrums des Maschinengeräusches detektiert werden /31,32/. Weitere Beispiele sind akustische Abbildungen mit Hilfe von Tripel-Korrelationen und Bispektren /35,38/, oder die bispektrale Analyse von Laser-Dopplersignalen zur Geschwindigkeitsmessung /39,41/. Auch die nichtlineare Wellenkopplung in Plasmen /44-45/, oder das Brechen von Ozeanwellen /46/ waren bereits mit Bispektren untersucht worden.

Trotz der eben genannten Beispiele - die Tripel-Korrelation blieb ein überraschend wenig beachtetes Konzept in der Signal- und Bildverarbeitung. Wie kommt es zu dieser, nach unseren Erfahrungen unbegründeten, Unbeliebtheit? Um diese Frage zu beantworten, ist es nützlich, die verwendeten Begriffe genauer zu definieren.

1.2 Die Tripel-Korrelation und das Bispektrum - Definition der Begriffe und elementare Eigenschaften

Die Tripel-Korrelation $I^{(3)}(t_1, t_2)$ eines Signals $I(t)$ ist definiert als

$$I^{(3)}(t_1, t_2) = \int I(t) \cdot I(t+t_1) \cdot I(t+t_2) dt \quad (1)$$

Die Fouriertransformierte der Tripel-Korrelation $I^{(3)}(t_1, t_2)$

nennen wir Bisppektrum

$$\begin{aligned}\tilde{I}^{(3)}(f_1, f_2) &= \int I^{(3)}(t_1, t_2) \exp[2\pi i(t_1 f_1 + t_1 f_1)] \\ &= \tilde{I}(f_1) \cdot \tilde{I}(f_2) \cdot \tilde{I}(-f_1 - f_2)\end{aligned}\quad (2)$$

wobei $\tilde{I}(f)$ das (komplexe) Signalspektrum bezeichnet. Mathematische Eigenschaften und eine modifizierte Definition des Bisppektrums /22-24/ werden in Kap.3 diskutiert.

Für praktische physikalische Anwendungen der Tripel-Korrelation $I^{(3)}$ sind folgende drei Eigenschaften wichtig:

- 1) In vielen Fällen ist $I^{(3)}$ meßbar, das Signal I jedoch nicht.
- 2) Die Tripel-Korrelation $I^{(3)}$ weiß mehr über das zugrundeliegende Signal I als die Autokorrelation.

$$I^{(2)}(t_1) = \int I(t) \cdot I(t+t_1) dt$$

- 3) $I^{(3)}$ ist unter gewissen Voraussetzungen rauschunempfindlicher als $I^{(2)}$.

Diese recht vagen Aussagen werden im Laufe der Arbeit klarer und konkreter. Warum ist die Tripel-Korrelation trotz dieser positiven Eigenschaften so wenig verbreitet? Ein Grund hierfür liegt vielleicht in der Tatsache, daß einige Argumente für die Signalverarbeitung mit Korrelationen zweiter Ordnung sprechen. So ist zum Beispiel die Berechnung von $I^{(3)}$ zeitaufwendiger als die von $I^{(2)}$, und $I^{(3)}$ benötigt mehr Speicherplatz. Zudem ist $I^{(2)}$ oft leichter zu beobachten als $I^{(3)}$. Auch die Mathematik von $I^{(2)}$ ist bekannter als die von $I^{(3)}$.

Ein weiterer Grund könnte die Vermutung sein, daß das Ensemble-Mittel $\langle I^{(3)} \rangle$ fast immer null ist. Diese Vermutung gründet auf dem bekannten Theorem von Reed oder Wang-Uhlenbeck. Nach diesem Theorem sind alle Korrelationen ungerader Ordnung im Mittel null, wenn der stochastische Prozeß Gaußisch, stationär ist und den Mittelwert null hat. Wenn auch viele Zufallsprozesse diese Eigenschaften erfüllen, so doch sicherlich lange nicht alle.

1.3 Kapitelübersicht

Obwohl die astronomische Speckle-Masking-Methode ein Spezialfall für viele mögliche Anwendungen von Tripel-Korrelationen ist, soll sie am Anfang dieser Dissertation stehen. Der Grund hierfür liegt in der recht anschaulichen Beschreibung der gestellten Aufgabe und dem intuitiven Charakter des Lösungsweges. Außerdem entspricht die gewählte Reihenfolge dem zeitlichen Entstehen der Arbeit.

In Kapitel 2. wird zunächst das Prinzip der astronomischen Speckle-Interferometrie /1,2/ und der Speckle-Holographie /3,6/ wiederholt. Diese Wiederholung ist für das intuitive Verständnis der Speckle-Masking-Methode /7,V5/ sinnvoll und erleichtert auch das Verständnis der mathematischen Formulierungen /V6/. Danach werden Ergebnisse mehrerer Anwendungen der Speckle-Masking-Methode gezeigt. Schließlich wird die Methode auf den Fall stark photonenverrauschter Rohdaten erweitert /V7/. Eine theoretische Berechnung zeigt, daß photonenzählendes Speckle-Masking auch dann echte Bilder liefert, wenn die Speckle-Interferogramme aus nur wenigen Photonenereignissen bestehen. Am Ende von Kapitel 2 werden andere bekannte Methoden zur Bildrekonstruktion aus Speckle-Interferogrammen erwähnt und soweit möglich, mit der Speckle-Masking-Methode verglichen.

Kapitel 3 dieser Arbeit hat einen allgemeinen und grundlegenden Charakter. In Abschnitt 3.1 werden einige wichtige Eigenschaften der Tripel-Korrelation und deren Fouriertransformierten, dem Bispektrum diskutiert.

Abschnitt 3.2 behandelt das Problem der eindeutigen Signalrekonstruktion aus Tripel-Korrelationen und Bispektren. Wir konnten zeigen: "Für ein reelles Signal endlicher Ausdehnung läßt sich das Signal (bis auf eine Verschiebung) eindeutig aus seiner Tripel-Korrelation berechnen." Wir diskutieren einen mathematischen Beweis dieser Aussage. Für praktische Anwendungen geben wir einen rauschunempfindlichen Computer-Algorithmus zur Signalrekonstruktion.

In Kapitel 4 wird eine Methode vorgeschlagen um mit Hilfe von Tripel-Korrelationen die echte Pulsform von ultrakurzen Laserpulsen zu messen /V10/. Bislang war es nur möglich, die Autokorrelation der Pulsform zu messen.

Kapitel 5 gibt eine kurze Übersicht weiterer Anwendungen der Tripel-Korrelation und des Bispektrums, die aus der Literatur bekannt sind.

Kapitel 6 enthält zwei Projektskizzen. Zum einen zeigen erste Experimente, daß sich Bispektren dazu verwenden lassen um neue Qualitätskriterien für Flöten und andere Musikinstrumente zu finden, zum anderen wird eine Methode skizziert um extrem schwach leuchtende bewegte Objekte ohne Bewegungsunschärfe zu photographieren.

K A P I T E L 2

DIE TRIPEL-KORRELATION IN DER ASTRONOMISCHEN SPECKLE-INTERFEROMETRIE

In diesem Kapitel wird gezeigt, daß man mit Hilfe von Tripel-Korrelationen echte Bilder beliebiger astronomischer Objekte gewinnen kann, die 30 mal schärfer sind als bei konventioneller astronomischer Langzeitphotographie. Die Bildverschlechterung durch die turbulente Erdatmosphäre, aber auch Abbildungsfehler des Teleskops lassen sich überwinden. Auch die Verarbeitung extrem lichtschwacher Objekte ist möglich. Am Ende des Kapitels steht ein Vergleich mit anderen Speckle-Bildrekonstruktions-Methoden. Die Rohdaten für die Experimente wurden von G. Weigelt, J. Ebersberger, G. Baier und E. Keller mit dem 3,6 Meter Spiegel der Europäischen Südsternwarte in La Silla/Chile aufgenommen.

Die mathematischen Formulierungen in diesem Kapitel sind anwendungsorientiert. Es ist möglich, bereits vor diesem Kapitel das allgemeine Konzept der Tripel-Korrelation in Kapitel 3 zu lesen.

2.1 Labeyries Speckle-Interferometrie

Betrachtet man einen Stern durch ein großes Teleskop, so beobachtet man ein verschwommenes Bild. Dieses Bild besteht aus vielen kleinen Flecken (Fig. 2), die sich wegen der turbulenten Erdatmosphäre ständig bewegen.



Fig. 2 Astronomische Kurzzeitbelichtung (1/100 s) eines Doppelsternes. Bei einer Langzeitbelichtung entsteht die Aufnahme in Fig. 1 auf Seite 8.

In der herkömmlichen Astrophotographie verwendet man Belichtungszeiten die einige Größenordnungen länger sind, als die typische Zeitkonstante der atmosphärischen Turbulenzen. Die Folge ist, daß das Fleckenmuster verwischt wird und ein unscharfes Bild mit etwa 1" (Bogensekunde) Auflösung entsteht (Fig. 1). Das theoretische Auflösungsvermögen eines großen Teleskopes mit einem Spiegel mit 3,6 m Durchmesser beträgt im sichtbaren Licht jedoch 0,03" und ist damit mehr als 30 mal höher.

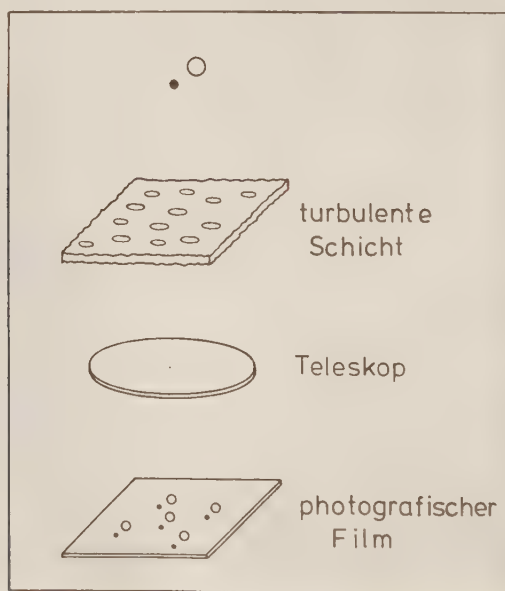


Fig. 3 Entstehung des Speckle-Interferogramms eines Doppelsternes (aus Ref. /V9/).

Labeyrie gelang es, trotz turbulenter Erdatmosphäre, das theoretische Auflösungsvermögen des Teleskopes zu erzielen, also $0,03''$ in dem obigen Beispiel /1,2/. Um Labeyries Speckle-Interferometrie zu verstehen, ist es sinnvoll, die Art der Bildverschlechterung für den Fall einer fast monochromatischen Abbildung genauer zu betrachten. Wie bereits oben erwähnt, verwandelt die turbulente Erdatmosphäre das Bild eines Sternes in ein Fleckenmuster, oder genauer gesagt in ein sogenanntes Speckle-Interferogramm. Die einzelnen Speckle sind in etwa Beugungsscheibchen der Teleskopöffnung. Ihre Zahl ist durch das Verhältnis der Teleskopöffnung zur typischen Größe der Turbulenzblasen in der Atmosphäre bestimmt. Für ein ausgedehntes Objekt vergrößert sich jedes Speckle in etwa zu einem beugungsbegrenzt scharfen, quasi-monochromatischen Bild des Objektes (Fig. 3).

In einer mehr mathematischen Formulierung bedeutet dies: "Für eingefrorene Turbulenz läßt sich das unscharfe Bild des Objektes $I_n(\underline{x})$ (zur Zeit t_n) als Faltung (*) des Objektes $O(\underline{x})$ mit der kombinierten Punktbildfunktion $P_n(\underline{x})$ des Teleskopes und der turbulenten Erdatmosphäre beschreiben."

$$\begin{aligned}
 I_n(\underline{x}) &= \int O(\underline{x}') \cdot P_n(\underline{x} - \underline{x}') d\underline{x}' \\
 &= O(\underline{x}) * P_n(\underline{x})
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

Labeyrie erkannte, daß in den Kurzzeitbelichtungen $I_n(\underline{x})$, die Details des astronomischen Objektes nicht verloren sind, sondern nur an verschlüsselten Positionen erscheinen. In der Speckle-Interferometrie-Methode berechnet man die mittlere Autokorrelation vieler Speckle-Interferogramme. Figur 4 zeigt, daß die Autokorrelation $I_n^{(2)}(\underline{x}_1)$ eines Interferogramms

$$\begin{aligned}
 I_n^{(2)}(\underline{x}_1) &= \int I_n(\underline{x}) \cdot I_n(\underline{x} + \underline{x}_1) d\underline{x} \\
 &= I_n(\underline{x}) \otimes I_n(\underline{x})
 \end{aligned}$$

annähernd die beugungsbegrenzt scharfe Autokorrelation des Objektes $O^{(2)}(\underline{x}_1)$ enthält

$$\begin{aligned}
 O^{(2)}(\underline{x}_1) &= \int O(\underline{x}) \cdot O(\underline{x} + \underline{x}_1) d\underline{x} \\
 &= O(\underline{x}) \otimes O(\underline{x}).
 \end{aligned}$$

Eine genauere Erklärung der Speckle-Interferometrie läßt sich in der Fourierebene geben. Fouriertransformation der Rohdaten $I_n(\underline{x})$ liefert

$$\begin{aligned}
 \tilde{I}_n(\underline{u}) &= \int I_n(\underline{x}) \cdot \exp[2\pi i \cdot \underline{u} \cdot \underline{x}] \\
 &= \tilde{O}(\underline{u}) \cdot \tilde{P}_n(\underline{u}), \tag{3'}
 \end{aligned}$$

wobei Gl. (3) verwendet wurde. Das Langzeit-Spektrum

$$\langle \tilde{I}_n(\underline{u}) \rangle = \tilde{O}(\underline{u}) \cdot \langle \tilde{P}_n(\underline{u}) \rangle$$

enthält wegen den atmosphärischen Turbulenzen nur niedrige Frequenzen, im Vergleich zur beugungstheoretischen Grenzfrequenz. Anders, das über viele Bilder gemittelte Leistungsspektrum

$$\langle |\tilde{I}_n(\underline{u})|^2 \rangle = |\tilde{O}(\underline{u})|^2 \cdot \langle |\tilde{P}_n(\underline{u})|^2 \rangle \tag{4}$$

Die Speckle-Interferometrie-Übertragungsfunktion $\langle |\tilde{P}_n(\underline{u})|^2 \rangle$ ist positiv und ungleich null für alle Frequenzen unterhalb der beugungstheoretischen Grenzfrequenz des Teleskopes /64-66/.

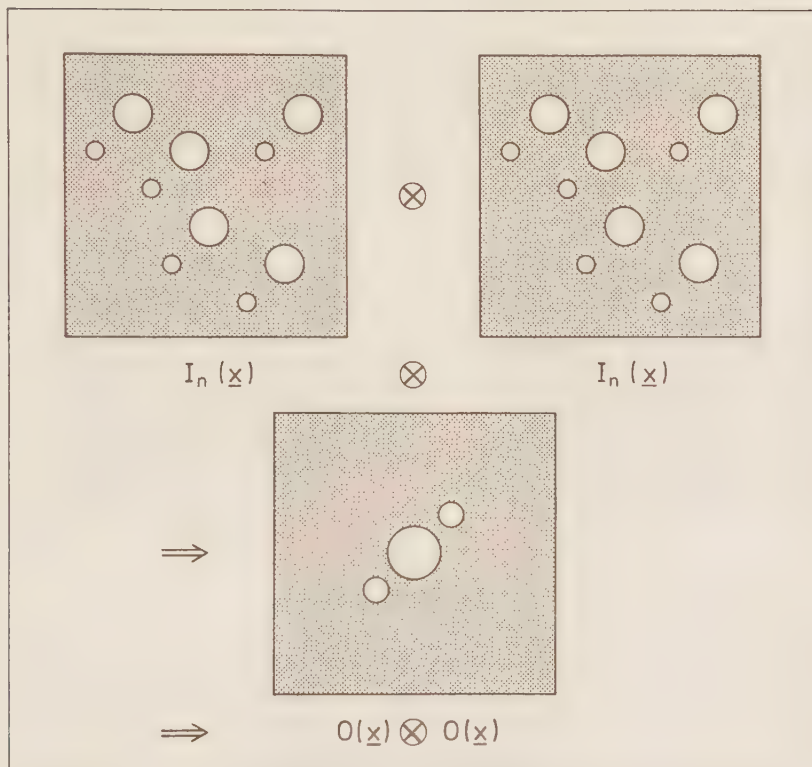


Fig. 4 Das Grundprinzip der astronomischen Speckle-Interferometrie; erklärt am Beispiel eines Doppelsternes (aus Ref. /V9/).

Da $\langle |\tilde{P}_n(\underline{u})|^2 \rangle$ aus theoretischen Überlegungen, oder durch Messung eines isolierten Punksternes (in Gl. (4) gilt dann $|\tilde{O}(\underline{u})|^2 = 1$) bekannt ist, läßt sich aus Gl. (4) das Objekt-Leistungsspektrum $|\tilde{O}(\underline{u})|^2$ bestimmen. Fourier-Transformation von $|\tilde{O}(\underline{u})|^2 = \tilde{O}^{(2)}(\underline{u})$ ergibt schließlich die Autokorrelation $O^{(2)}(\underline{x}_1)$ des Objektes, und zwar mit beugungstheoretischer Auflösung, in Übereinstimmung mit der am Anfang gegebene Plausibilitätserklärung.

Die Speckle-Interferometrie-Methode liefert hochaufgelöste Objektautokorrelationen! Ist es auch möglich um echte, beugungstheoretisch scharfe Bilder zu bekommen? Eine allgemeine Lösung dieses Problems und erfolgreiche Anwendungen werden in dem folgenden Abschnitt 2.3 beschrieben. Aber zunächst wird kurz die Speckle-Holographie-Methode wiederholt um den Leser vorzubereiten.

2.2 Speckle-Holographie

Speckle-Holographie /3-6/ ist eine Bildrekonstruktions-Methode in der man einen punktförmigen, unaufgelösten Referenzstern in der Nähe des untersuchten Objektes verwendet. Man berechnet die Kreuzkorrelation aus den Objekt-Speckle-Interferogrammen mit den entsprechenden Interferogrammen des Referenzsternes (Fig. 5). Mittelt man diesen Prozeß über viele Bilder, so erhält man, nach Kompensation der Speckle-Interferometrie-Transferfunktion, ein echtes Bild des Objektes.

In einer mathematischen Formulierung in der Fourierebene bedeutet dies,

$$\begin{aligned} \langle \tilde{I}_n(\underline{u}) \cdot \tilde{P}_n(\underline{u})^* \rangle &= \langle \tilde{O}(\underline{u}) \cdot \tilde{P}_n(\underline{u}) \cdot \tilde{P}_n(\underline{u})^* \rangle \\ &= \tilde{O}(\underline{u}) \cdot \langle |\tilde{P}_n(\underline{u})|^2 \rangle, \end{aligned} \quad (4')$$

hierbei wurde verwendet, daß eine Kreuzkorrelation im Ortsraum, im Fourierraum einer Multiplikation von Spektrum und konjugiert-komplexen Spektrum entspricht. Wie Gl. (4') zeigt, liefert die Speckle-Holographie, nach Kompensation der Transferfunktion $\langle |\tilde{P}_n(\underline{u})|^2 \rangle$, das komplexe Objektspektrum $\tilde{O}(\underline{u})$ und daher auch das Objekt $O(\underline{x})$.

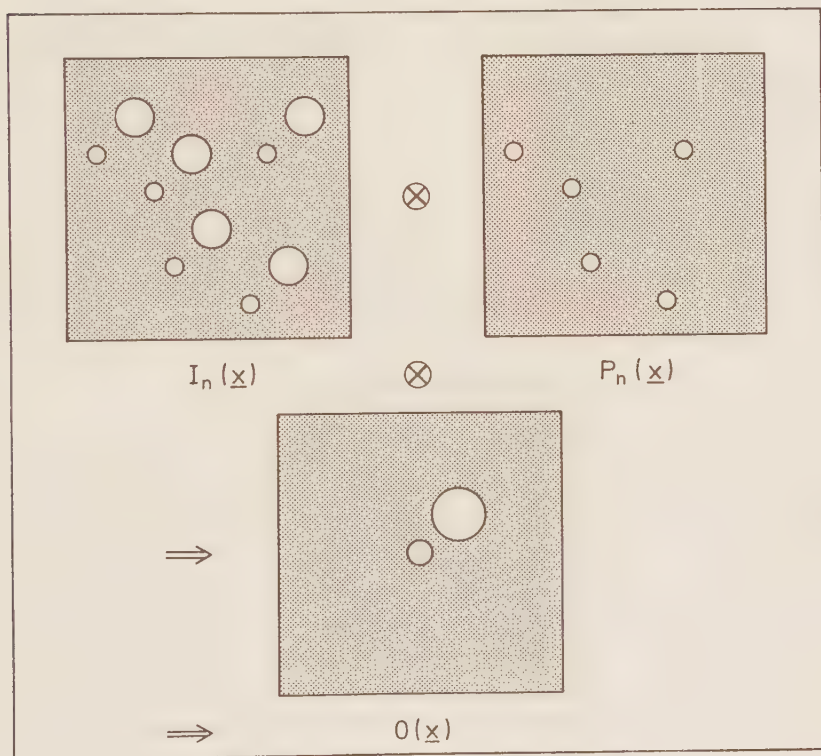


Fig. 5 Das Grundprinzip der Speckle-Holographie; erklärt im Falle eines Doppelsternes (aus Ref. /V9/).

Sicherlich, in der Speckle-Holographie muß das Licht des Referenzsternes und des Objektes die gleichen Turbulenzgebiete in der Atmosphäre durchdrungen haben. Nur dann kann der Referenzstern als Entfaltungsschlüssel zur Objekt-Rekonstruktion dienen. Der Referenzstern sollte möglichst nicht weiter als 10" vom Objekt entfernt sein, was die Klasse der Objekte einschränkt, die man mit der Methode beobachten kann. Aber wir werden gleich sehen, daß es Bildrekonstruktions-Methoden gibt, die den Referenzstern nicht einmal benötigen.

2.3 Speckle-Masking

Die Speckle-Masking-Methode /7,V5,V6/ ist in mancher Hinsicht eine Verallgemeinerung der Speckle-Holographie-Methode. Der neue Aspekt von Speckle-Masking ist, daß man sich mit Hilfe einer Maske einen künstlichen Referenzstern aus den Speckle-Interferogrammen des Objektes erzeugt /7/.

Der Maskierungsschritt ist in Fig. 6 für den Fall eines Doppelsternes illustriert. Multiplikation jedes Speckle-Interferogramms mit dem selben, aber geeignet verschobenen Interferogramm, liefert ein Speckle-Muster, das dem eines Referenzsternes ähnlich ist, wenn auch nur in gewisser Hinsicht. Der geeignete Verschiebungsvektor $\underline{s}$ entspricht dem Abstandsvektor des Doppelsternes und kann aus einem Speckle-Interferometrie-Experiment gewonnen werden. Schließlich wird der künstliche Referenzstern mit dem entsprechenden Objekt-Speckle-Interferogramm kreuzkorreliert und das Ensemble-Mittel über viele Bilder gebildet; d.h.

$$\langle [I_n(\underline{x}) \cdot I_n(\underline{x} + \underline{s})] \otimes I_n(\underline{x}) \rangle \Rightarrow O(\underline{x}) \quad (5)$$

Der Pfeil in Gl. (5) wird später genauer erklärt; er symbolisiert die Kompensation der Speckle-Masking-Transferfunktion. Diese ist nicht mit der Speckle-Interferometrie-Transferfunktion identisch, da der künstliche Referenzstern systematische Fehler enthält.

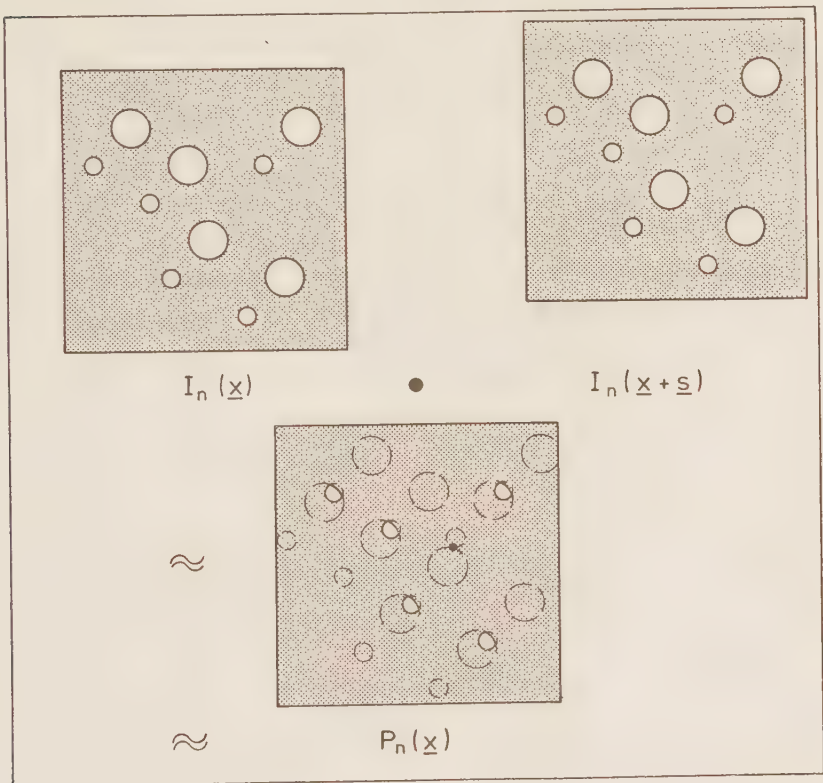


Fig. 6 Das Grundprinzip der Speckle-Masking-Methode. Die multiplikative Maske hat Ähnlichkeit mit dem Speckle-Muster eines Referenzsternes. Der künstliche Referenzstern kann in einem Speckle-Holographie-Experiment verwendet werden (aus Ref./V9./).

Die graphische Erklärung in Fig.6 war Ausgangspunkt für diese Dissertation. Die Fragestellung war nun: "Läßt sich das anschauliche Konzept auf beliebige, komplizierte Objekte verallgemeinern? Welchen Einfluß hat die bislang unbekannte Speckle-Masking-Transferfunktion und wie läßt sich diese kompensieren? Ist eine Bildrekonstruktion auch bei extrem schwachen Lichtintensitäten möglich?" Dies sind drei grundlegende Fragen, die in dieser Dissertation beantwortet werden.

2.3.1 Ein allgemeines Konzept

Um ein allgemeines Konzept zu entwickeln schreiben wir Gl.(5) als Tripel-Korrelation

$$\begin{aligned} & \langle [I_n(\underline{x}) \cdot I_n(\underline{x} + \underline{s})] \otimes I_n(\underline{x}) \rangle = \\ & \langle \int I_n(\underline{x}) \cdot I_n(\underline{x} + \underline{s}) \cdot I_n(\underline{x} + \underline{x}_2) d\underline{x} \rangle =: \\ & \langle I_n^{(3)}(\underline{x}_1 = \underline{s}, \underline{x}_2) \rangle. \end{aligned} \quad (6)$$

Jetzt betrachten wir den Verschiebungsvektor $\underline{s}$ als Variable, d.h.

$$\langle I_n^{(3)}(\underline{s}, \underline{x}_2) \rangle \rightarrow \langle I_n^{(3)}(\underline{x}_1, \underline{x}_2) \rangle. \quad (7)$$

Fouriertransformation der Tripel-Korrelation $\langle I_n^{(3)}(\underline{x}_1, \underline{x}_2) \rangle$ ergibt das Bispektrum

$$\begin{aligned} \langle \tilde{I}_n^{(3)}(\underline{u}_1, \underline{u}_2) \rangle &= \langle \tilde{I}_n(\underline{u}_1) \tilde{I}_n(\underline{u}_2) \tilde{I}_n(-\underline{u}_1 - \underline{u}_2) \rangle \\ &= \tilde{0}^{(3)}(\underline{u}_1, \underline{u}_2) \cdot \tilde{P}_n^{(3)}(\underline{u}_1, \underline{u}_2) \end{aligned} \quad (8)$$

Gleichung (8) wird in Fig. 7 und Fig. 8 illustriert und erklärt. Das Überraschende an Gl.(8) ist, daß die Transferfunktion $\langle \tilde{P}_n^{(3)} \rangle$ für alle Frequenzen unterhalb der beugungstheoretischen Grenzfrequenz des Teleskops reell und größer als null ist (siehe Fig. 8). Falls $\langle \tilde{P}_n^{(3)} \rangle$ bekannt ist, können wir $\tilde{O}^{(3)}$ aus Gl. (8) gewinnen. $\langle \tilde{P}_n^{(3)} \rangle$ ist meßbar durch Beobachtung eines Punktoobjektes, für das $|\tilde{O}|=1$ und $\tilde{O}^{(3)}=1$.

Sobald wir $\tilde{O}^{(3)}$ kennen, kennen wir auch das komplexe Objektspektrum $\tilde{O}(\underline{u})$ (bis auf einen Faktor $\exp(2\pi i s \underline{u})$) und daher auch das Objekt $O(\underline{x})$ (bis auf seine absolute Lage). Diese Behauptung wird in Kapitel 3 ausführlich begründet und es werden Computer-Algorithmen zur Objektrekonstruktion diskutiert. Dabei bedeutet Objektrekonstruktion die Berechnung von $O(\underline{x})$ aus $\tilde{O}^{(3)}(\underline{u}_1, \underline{u}_2)$. Fig. 9,10,11 zeigen Anwendungen der Speckle-Masking-Methode. Weitere Anwendungen sind in Ref. /V5/ gezeigt.

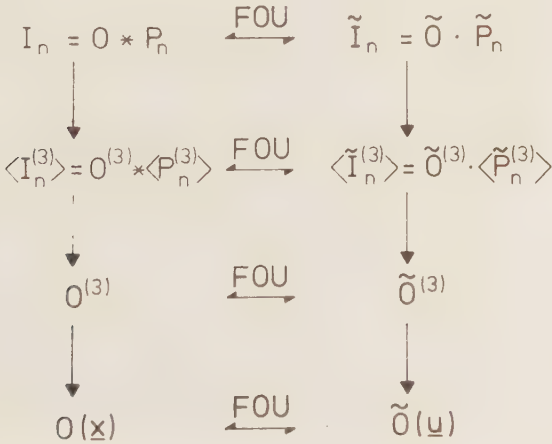


Fig. 7 Das mathematische Konzept der Speckle-Masking-Methode (aus Ref. /V6/).

- Fig. 8 a) Die Speckle-Masking-Transferfunktion, die aus 1000 Speckle-Interferogrammen eines unauflösbaren Einzelsternes berechnet wurde;
- b) das gemittelte Bispektrum von 150 Speckle-Interferogrammen des Doppelsternes Omega LEONIS;
- c) das Objekt-Bispektrum von Omega LEONIS.

Es ist jeweils ein 2-dimensionaler Ausschnitt aus dem 4-dimensionalen Bispektrum dargestellt, was einer 1-dimensionalen Projektion der Speckle-Bilder entspricht. Nur der Modulus der komplexen Werte ist gezeigt (genauer siehe Ref. /V6/).

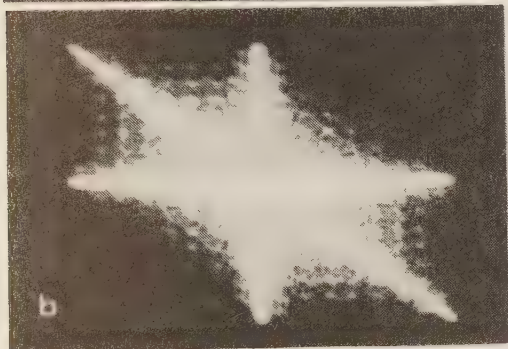
Fig. 9 Speckle-Masking-Bildrekonstruktion des engen spektroskopischen Doppelsternes Omega LEONIS;

- a) eines der 300 ausgewerteten Speckle-Interferogramme;
- b) das rekonstruierte, echte Bild von Omega LEONIS.

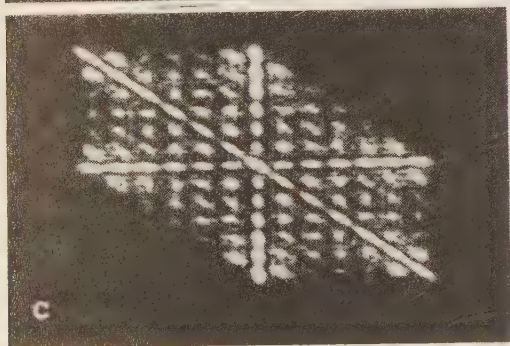
Epoche : 1980.19 Position : $17,0^{\circ} \pm 1^{\circ}$
 Separation : $0,463'' \pm 0,004''$ Intensitätsv.: $1,6 \pm 0,3$
 (aus Ref. /V6/.



$$\langle \tilde{P}_n^{(3)} \rangle$$



$$\langle \tilde{I}_n^{(3)} \rangle = \tilde{O}^{(3)} \cdot \langle \tilde{P}_n^{(3)} \rangle$$



$$\tilde{O}^{(3)}$$

Fig. 8

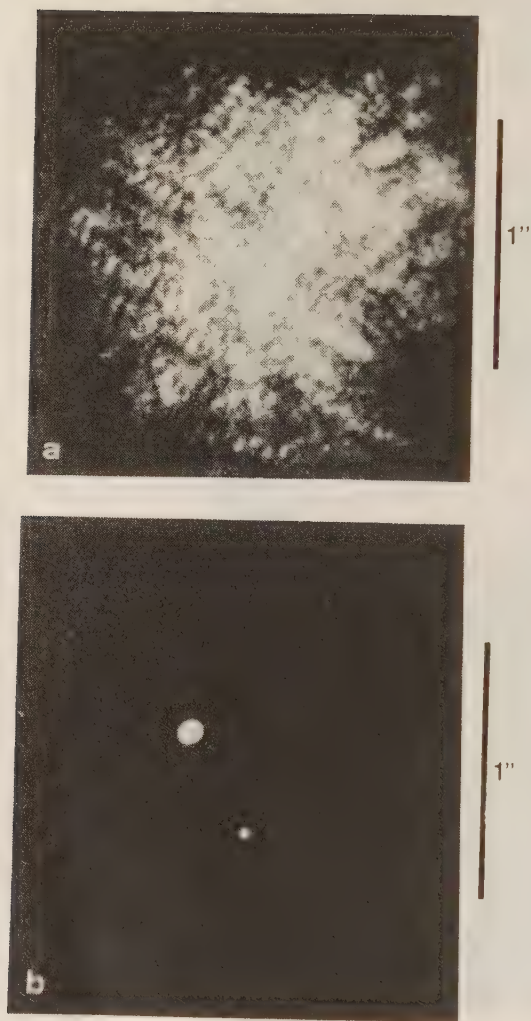


Fig. 9

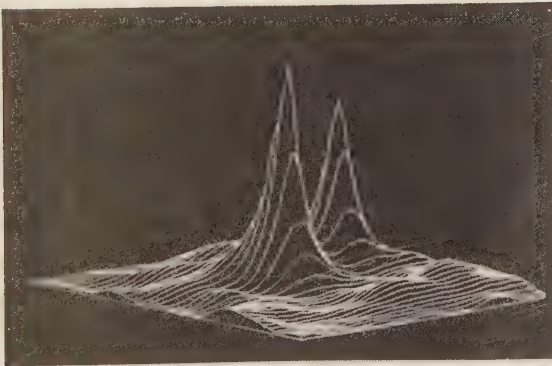
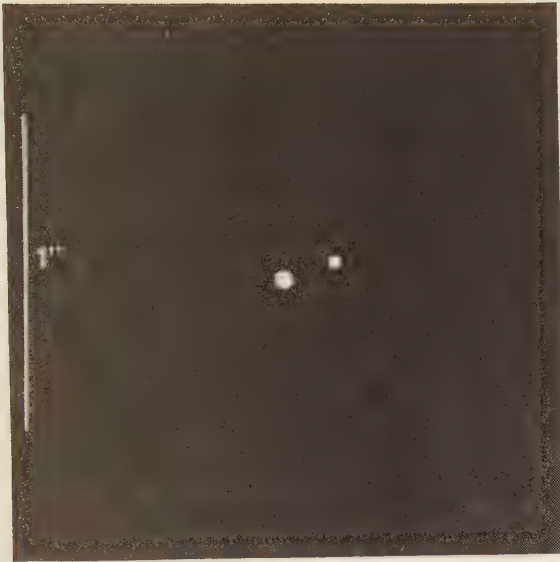


Fig. 10 Speckle-Masking-Bildrekonstruktion des engen spektroskopischen Doppelsternes Psi SAGITARI.

Epoche : 1982.378 Separation : $0.184'' \pm 0,004''$

Position: $105.6^\circ \pm 1^\circ$ Intensitätsv.: $1.3 \pm 0,4$

Für praktische Anwendungen und astronomische Fragestellungen sind einige weitere Details wichtig. Diese sind im Anhang skizziert. Zum Beispiel läßt sich der zeitliche Rechenaufwand um etwa einen Faktor 100 verringern, wenn man die explizite Berechnung von 4-dimensionalen Bispektren vermeidet. Dies ist für ein Gaußisches Modell der Atmosphäre möglich. Die Gaußische Annahme ist meist eine akzeptable Näherung; sie wurde zur Rekonstruktion der Bilder in Fig. 9-11 verwendet. Eine andere Überlegung (siehe Anhang) läßt eine Verbesserung der astronomischen Masse-Leuchtkraft-Beziehung mit Hilfe von Speckle-Masking vermuten /67/. Weitere Details würden an dieser Stelle den Fluß der Handlung stören. Stattdessen soll ein anderes, prinzipiell wichtiges Problem diskutiert werden.

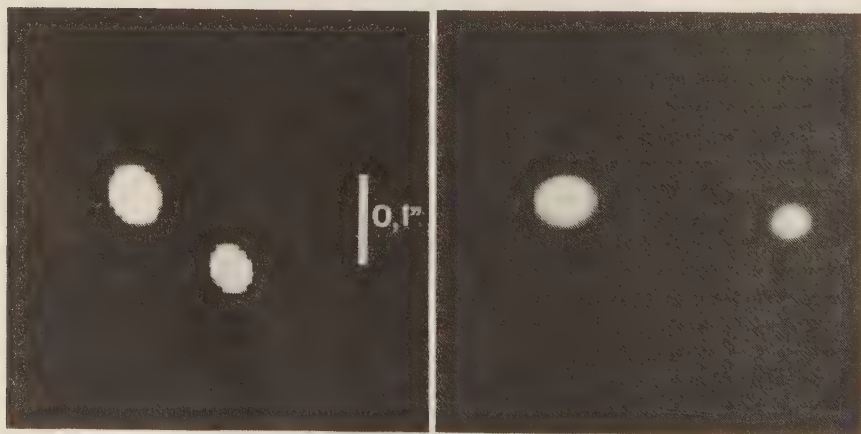


Fig. 11 Kepler-Bewegung des spektroskopischen Doppelsternes 9-PUPPIS (Genauerer siehe Ref. /67/).

2.3.2 Der Einfluß von Photonenrauschen in den Rohdaten

Die interessantesten astronomischen Objekte sind meist sehr lichtschwach und ihre Speckle-Interferogramme bestehen nur aus wenigen isolierten Photonen-Ereignissen (Fig. 12). Solche photonenzählenden Speckle-Interferogramme $P_n(\underline{x})$ lassen sich als Summe von Delta-Funktionen an den Orten $\underline{x}_j$ der Photonen-Ereignisse beschreiben

$$D_n(\underline{x}) = \sum_{j=1}^N \delta(\underline{x} - \underline{x}_j) , \quad (9)$$

wobei N die Gesamtzahl der detektierten Photonen im n -ten Bild ist. Natürlich ändern sich sowohl N , als auch die Photonen-Koordinaten $\underline{x}_j$ von Bild zu Bild.

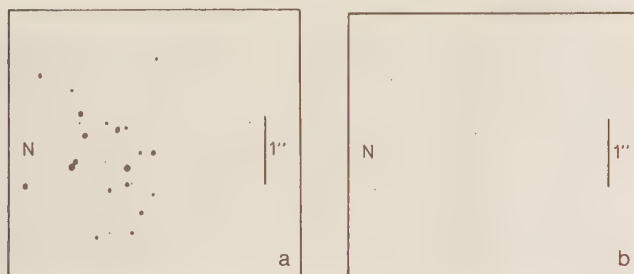


Fig. 12 Photonenverraushtes Speckle-Interferogramm des Planeten Pluto mit Mond Charon (a); (b) nach Berechnung der Photonen-Koordinaten.
(Aufnahme und Vorverarbeitung: G.Weigelt, G.Baier)

Ähnlich wie im letzten Abschnitt bilden wir nun das gemittelte Bispektrum vieler photonenzählender Rohdaten und erhalten als Erwartungswert (siehe Anhang 2.)

$$\begin{aligned} \langle \tilde{D}_n^{(3)}(\underline{u}_1, \underline{u}_2) \rangle &= \bar{N}^3 \langle \tilde{i}_n^{(3)}(\underline{u}_1, \underline{u}_2) \rangle + \\ &+ \bar{N}^2 [\langle \tilde{i}_n^{(2)}(\underline{u}_1) \rangle + \langle \tilde{i}_n^{(2)}(\underline{u}_2) \rangle + \langle \tilde{i}_n^{(2)}(-\underline{u}_1 - \underline{u}_2) \rangle] \\ &+ \bar{N} , \end{aligned} \quad (10)$$

wobei die Kleinbuchstaben normalisierte Spektren und Bispektren bedeuten (also $\tilde{i}(0) = 1 = \tilde{i}^{(3)}(0,0)$) und wobei $\bar{N}$ die mittlere Photonenzahl pro Speckle-Interferogramm bezeichnet. In Fig. 13 wird Gl.(10) am Beispiel des Bispektrums eines Doppelsternes illustriert. Der Einfluß des Photonenrauschens in der Speckle-Interferometrie wird in Ref. /70-74/ diskutiert.

Zur Bildrekonstruktion aus Astro-Speckle-Interferogrammen benötigen wir das (ensemble-) gemittelte Bispektrum $\langle \tilde{i}_n^{(3)} \rangle$ der klassischen Lichtintensität, die auf den Detektor fällt. Aus Gl. (10) erkennt man, daß $\langle \tilde{i}_n^{(3)} \rangle$ aus $\langle \tilde{D}_n^{(3)} \rangle$ zu gewinnen ist, nachdem man den sogenannten "Photonenuntergrund" kompensiert hat. Der Photonenuntergrund enthält Terme, die Korrelationen zweiter Ordnung darstellen. Diese Terme lassen sich durch Berechnung des (ensemble-) gemittelten Leistungsspektrums der Rohdaten bestimmen

$$\langle |\tilde{D}_n(\underline{u})|^2 \rangle = \bar{N} + \bar{N}^2 \langle \tilde{i}_n^{(2)}(\underline{u}) \rangle . \quad (11)$$

Astronomen interessieren sich besonders für sehr schwache Objekte. Daher stellen wir die Frage: "Wieviele Photonen müssen wir pro Bild detektieren um ein bestimmtes Signal-zu-Rausch-Verhältnis zu erzielen?"

Um diese Frage zu beantworten erscheint ein Vergleich mit der Speckle-Interferometrie sinnvoll. Speckle-Interferometrie wurde bereits auf Objekte 17-ter Größe angewandt /68,69/. Eine theoretische Abschätzung des SNR zeigte, daß eine Bildrekonstruktion aus Bispektren der Leistungsspektrum-Analyse in der Speckle-Interferometrie überlegen ist, wenn die mittlere

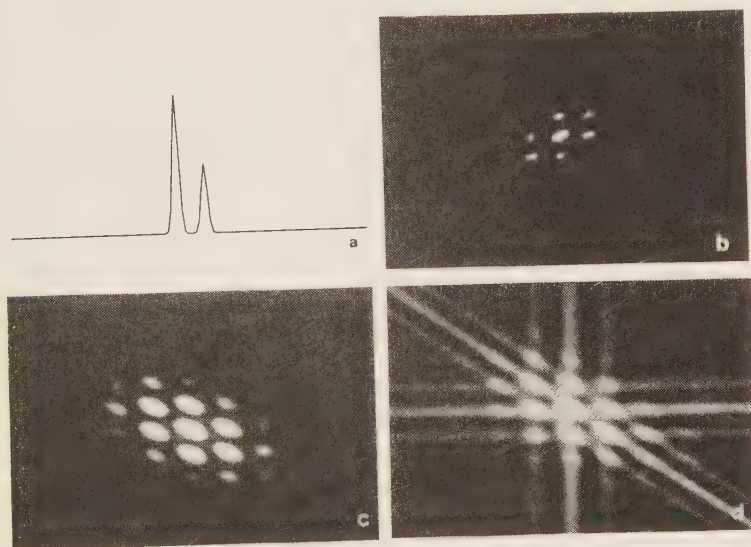


Fig. 13 Der Einfluß von Photonenrauschen auf Bispektren.

- a) Simulierter Doppelstern (1-dimensionale Simulation),
- b) seine Tripel-Korrelation und
- c) sein Bispektrum.
- d) Erwartungswert des Bispektrums aus (c) bei Photonenrauschen. Es wurde angenommen, daß die Rohdaten im Mittel fünf Photonen enthalten (aus Ref. /V6/).

Photonenzahl pro Speckle-Bild größer als ungefähr 4 ist (siehe Anhang 2.). Dies ist plausibel, da man zwar leicht das Leistungsspektrum aus dem Bispektrum herleiten kann, aber nicht umgekehrt

$$\begin{aligned}
 \tilde{0}^{(3)}(\underline{u}_1, \underline{u}_2=0) &= \tilde{0}(\underline{u}_1) \tilde{0}(0) \tilde{0}(-\underline{u}_1) \\
 &= |\tilde{0}(\underline{u}_1)|^2 \cdot \text{konst} \\
 &= \tilde{0}^{(2)}(\underline{u}_1) \cdot \text{konst} .
 \end{aligned} \tag{12}$$

Oder mit anderen Worten, die kubische Mittelung zerstört weniger Signal-Information als die quadratische Mittelung. Genauere Details sind im Anhang 2. skizziert.

Abschließend sei bemerkt, daß die in diesem Abschnitt diskutierten Resultate für die Verarbeitung von beliebigen Photonverrauschten Signalen gültig sind. Eine weitere Anwendung der Resultate wird in Kap. 6 diskutiert.

2.4 Ein Vergleich mit anderen Methoden

Als diese Arbeit begonnen wurde gab es schon einige unterschiedliche Vorschläge um echte Bilder aus Speckle-Interferogrammen zu rekonstruieren/2-21/. Zwei dieser Methoden lieferten bereits echte Bilder astronomischer Objekte und sind außerdem auf allgemeine Objekte anwendbar. Es sind der Fienup-Algorithmus /12,13/ und die Knox-Thomson Methode /8/. Die Grundidee dieser beiden Verfahren findet sich in einigen weiteren Bildrekonstruktions-Algorithmen /9-11,14,15/. Im Folgenden sollen die Fienup- und die Knox-Thomson-Methode skizziert werden, um sie mit Speckle-Masking vergleichen zu können.

2.4.1 Fienups Algorithmus

Fienups Algorithmus /12,13/ rekonstruiert die Objektintensität $O(\underline{x})$ aus dem Fouriermodulus $|\tilde{O}(\underline{u})|$, der aus einem Speckle-Interferometrie-Experiment gewonnen werden kann (siehe Abschnitt 2.1). Mit anderen Worten, man schätzt die Fourierphase $\varphi(\underline{u})$ des Objektes aus der Kenntnis des Fouriermodulus $|\tilde{O}(\underline{u})|$ und aufgrund der Tatsache, daß das Objekt endlich ausgedehnt und positiv ist (siehe Fig. 14).

Man könnte vermuten, daß ein solcher Algorithmus hochgradig vieldeutige Lösungen liefert. Das trifft für 1-dimensionale Signale tatsächlich zu. Überraschenderweise reduziert sich die Vieldeutigkeit im Falle 2-dimensionaler Signale im wesentlichen auf eine Zweideutigkeit bezüglich einer 180° -Drehung des Objektes, wie Fienups Experimente zeigen.

2.4.2 Der Knox-Thomson Algorithmus

Diese Bildrekonstruktions-Methode /8/ berechnet das gemittelte Kreuzspektrum vieler Speckle-Interferogramme, d.h.

$$\begin{aligned}\langle \tilde{I}_n(\underline{u}) \cdot \tilde{I}_n(\underline{u} + \Delta \underline{u}) \rangle &= \tilde{O}(\underline{u}) \cdot \tilde{O}^*(\underline{u} + \Delta \underline{u}) \cdot \\ &\quad \langle \tilde{P}_n(\underline{u}) \cdot \tilde{P}_n^*(\underline{u} + \Delta \underline{u}) \rangle\end{aligned}\quad (13)$$

wobei wir Gl. (3) verwendet haben. Die Übertragungsfunktion $\langle \tilde{P}_n(\underline{u}) \cdot \tilde{P}_n^*(\underline{u} + \Delta \underline{u}) \rangle$ der Knox-Thomson Methode ist größer als null falls $\Delta \underline{u}$ kleiner als die Bandbreite der Langzeitaufnahme ist. Damit erhält man aus $\tilde{O}(\underline{u}) \cdot \tilde{O}^*(\underline{u} + \Delta \underline{u})$ die Steigung der Fourierphase des Objektes

$$\Delta \varphi(\underline{u}) = \varphi(\underline{u}) - \varphi(\underline{u} + \Delta \underline{u}) \quad (14)$$

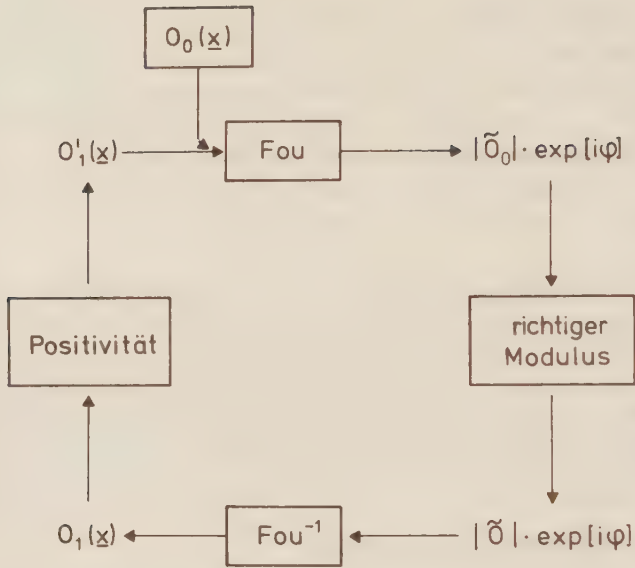


Fig. 14 FIENUPS Algorithmus

Die Iteration startet mit einem statistischen Schätzwert des Objektes $O_0(\underline{x})$. Dieser wird fouriertransformiert und ergibt $\tilde{O}_0(\underline{u}) = |\tilde{O}_0(\underline{u})| \exp[i\varphi_0(\underline{u})]$. Jetzt ersetzt man den Modulus $|\tilde{O}_0(\underline{u})|$ durch den bekannten Modulus $|\tilde{O}_0(\underline{u})|$, behält aber die Phase $\varphi_0(\underline{u})$ bei. Transformiert man in den Ortsraum, so erhält man den ersten Schätzwert $O_1(\underline{x})$ des Objektes. Das wahre Objekt $O(\underline{x})$ ist bekanntlich positiv und endlich ausgedehnt. Folglich setzt man alle Werte von $O_1(\underline{x})$, die dieser Bedingung nicht genügen, identisch null und startet einem neuen Iterationszyklus. Nach mehreren Iterationsschritten erhält man schließlich das (komplexe) Objektspektrum $\tilde{O}(\underline{u})$, oder entsprechend $O(\underline{x})$.

Aus Gl. (14) läßt sich die gewünschte Objektphase $\varphi(\underline{u})$ berechnen. Kombination der Phasen $\varphi(\underline{u})$ mit dem Moduli $|\tilde{O}(\underline{u})|$, die man aus der Speckle-Interferometrie kennt, liefert das komplexe Objektspektrum $\tilde{O}(\underline{u})$ und daher auch $O(\underline{x})$. Der Einfluß des Photonenrauschens auf den Knox-Thomson Algorithmus wird in Ref. /10/ untersucht.

2.4.3 Ein Vergleich

Der Ausgangspunkt für Fienups Iteration ist das Objekt-Leistungsspektrum $|\tilde{O}|^2$. Der zugrundeliegende Mittlungsprozeß $\langle |\tilde{I}_n|^2 \rangle = |\tilde{O}|^2 \langle |\tilde{P}_n|^2 \rangle$ zerstört zunächst alle Phaseninformation. Diese muß dann durch einen manchmal aufwendigen Iterationsprozeß zurückgewonnen werden.

Das Bispektrum $\langle \tilde{I}_n^{(3)} \rangle$ oder auch das Kreuzspektrum in Knox-Thomsons Methode (Gl. (13)) lassen Phaseninformation überleben und sind damit schonendere Mittlungsprozesse.

Wenn die Rohdaten allerdings als $|\tilde{O}|^2$ vorliegen ist Fienups-Iteration eine sehr gute, rauschunempfindliche Lösung. Experimente zeigen, daß das rekonstruierte Bild relativ stark von der richtigen Kompensation von $\langle |\tilde{P}_n|^2 \rangle$ in $\langle |\tilde{I}_n|^2 \rangle = |\tilde{O}|^2 \langle |\tilde{P}_n|^2 \rangle$ abhängt.

Sowohl $\tilde{I}^{(3)}$ als auch das Kreuzspektrum (Gl.13) lassen Phaseninformation überleben. Die Grundlage für Speckle-Masking ist das 4-dimensionale Bispektrum $\tilde{O}^{(3)}(\underline{u}_1, \underline{u}_2)$, das hochredundante Information über das 2-dimensionale (komplexe) Objektspektrum $\tilde{O}$ enthält. Mittelung der redundanten Information liefert Bilder mit gutem Signal-zu-Rausch-Verhältnis. Das Kreuzspektrum liefert hingegen nur Phasensteigungen. Die Rekonstruktion einer Funktion aus ihren Steigungen ist relativ rauschempfindlich (Fig. 15).

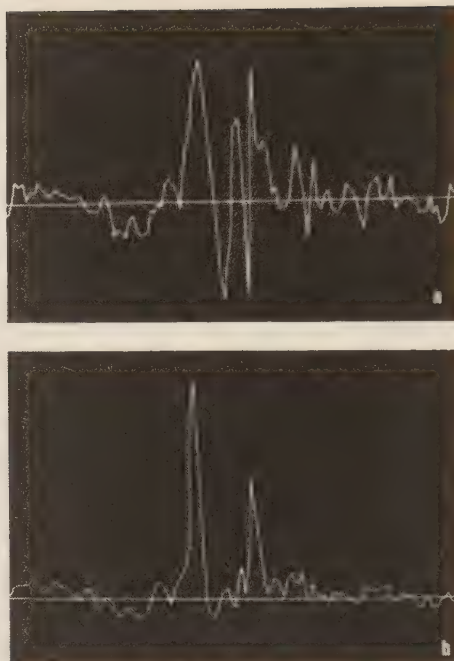


Fig. 15 Bildrekonstruktion des Doppelsternes Omega LEONIS aus 100 (1-dimensional projizierten) Speckle-Interferogrammen.

- a) Rekonstruktion mit der Knox-Thomson Methode,
- b) Rekonstruktion mit Speckle-Masking-Methode
(oder genauer: Rekursive Objektrekonstruktion aus dem Bispektrum).

K A P I T E L 3

DIE TRIPEL-KORRELATION UND DAS

BISPEKTRUM

In diesem Kapitel werden einige mathematische Grundlagen für die Signalverarbeitung mit Tripel-Korrelationen gegeben. Wir diskutieren die Eigenschaften der Tripel-Korrelation, den Einfluß von Rauschen, Untergrund und Unlinearitäten in den verarbeiteten Signalen und erwähnen sich daraus ergebende Anwendungen. Schließlich wird gezeigt, daß, und wie man ein Signal nahezu eindeutig aus seiner Tripel-Korrelation rekonstruieren kann. Die entwickelten Rekursions-Algorithmen sind sehr rauschunempfindlich.

3.1. Definitionen und Eigenschaften

Im Abschnitt 1.2. wurden die Tripel-Korrelation und das Bisppektrum definiert als

$$I^{(3)}(t_1, t_2) = \int I(t) \cdot I(t+t_1) \cdot I(t+t_2) dt \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \tilde{I}^{(3)}(f_1, f_2) &= \int I^{(3)}(t_1, t_2) \cdot \exp[-2\pi i(f_1 t_1 + f_2 t_2)] dt_1 dt_2 \\ &= \tilde{I}(f_1) \cdot \tilde{I}(f_2) \cdot \tilde{I}(-f_1 - f_2) \end{aligned} \quad (2)$$

wobei

$$\tilde{I}(f) = \int I(t) \exp(-2\pi i f t) dt$$

ist.

Diese Definitionen sind für deterministische und stochastische Signale sinnvoll. Für stochastische Signale ist es manchmal nützlich in Gl. (1) I durch die "zero-mean" Variable $I - \langle I \rangle$ zu ersetzen; diese Definition verwendet Brillinger /1,2/ in den, nach unserem Wissen, ersten Arbeiten über die Tripel-Korrelation. Eine besonders elegante Formulierung dieser Definition findet man in einer Arbeit von T. Sato /3/. Für die Bildverarbeitung ist eine Definition wie in Gl. (1) und Gl. (2) angebracht, da sie den tatsächlich gemessenen Signalen entspricht. Außerdem sei bemerkt, daß in der statistischen Literatur $\langle I^{(3)} \rangle$ manchmal auch als Korrelation zweiter Ordnung bezeichnet wird. Im Gegensatz zu den sonst üblichen Bezeichnungen: Tripel-Korrelation und Korrelation dritter Ordnung, aber Bisppektrum.

Aus Gl. (2) folgen die charakteristischen Symmetrien des

Bispektrums (siehe auch Fig. 8, zum Beispiel)

$$\tilde{I}^{(3)}(f_1, f_2) = \tilde{I}^{(3)}(f_2, f_1) = \tilde{I}^{(3)}(-f_1 - f_2, f_1). \quad (15)$$

Für ein reelles Signal $I(t)$, ist sowohl das Signalspektrum wie auch das Bispektrum hermitisch,

$$\tilde{I}(f) = \tilde{I}(-f)^* \quad ; \quad \tilde{I}^{(3)}(f_1, f_2) = \tilde{I}^{(3)}(-f_1, -f_2)^* \quad (16)$$

Die Symmetriebeziehungen in Gl. (15) und Gl. (16) bewirken, daß das Bispektrum eindeutig durch einen Winkel-Quadranten bestimmt ist. Für reelle Signale $I(t)$ genügt sogar schon ein Oktant.

Eine Erweiterung der Definition der Auto-Tripel-Korrelation auf Kreuz-Tripel-Korrelationen aus drei Signalen $I_K(t)$, $I_L(t)$ $I_M(t)$ ist einfach

$$I_{K,L,M}^{(3)}(t_1, t_2) = \int I_K(t) \cdot I_L(t+t_1) \cdot I_M(t+t_2) dt \quad (17)$$

Entsprechend ergibt sich das Kreuz-Bispektrum als

$$\tilde{I}_{K,L,M}^{(3)}(f_1, f_2) = \tilde{I}_K(f_1) \cdot \tilde{I}_L(f_2) \cdot \tilde{I}_M(-f_1 - f_2). \quad (18)$$

3.2. Der Einfluß von Rauschen, Untergrund und Nichtlinearitäten

Welchen Einfluß hat ein Untergrund im Signal auf die Tripel-Korrelation? Um diese Frage zu beantworten, betrachten wir ein einfaches Signal, wie zum Beispiel $I(t) = \cos(2\pi f_0 t)$. Die Tripel-Korrelation des Kosinus ist null! Um dies zu verstehen, gehen wir in die Fourierebene wo wir $2\tilde{I}(f) = \delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)$ erhalten. In Fig. 16 ist das Bispektrum

$\tilde{I}^{(3)}(f_1, f_2) = \tilde{I}(f_1)\tilde{I}(f_2)\tilde{I}(-f_1-f_2)$ in der (f_1, f_2) Domäne konstruiert. Jeder der 3 Faktoren besteht aus einem Paar paralleler Delta-Linien. Da es keinen Kreuzungspunkt mit 3 gemeinsamen Linien gibt, ist $\tilde{I}^{(3)}$ und damit $I^{(3)}$ identisch null.

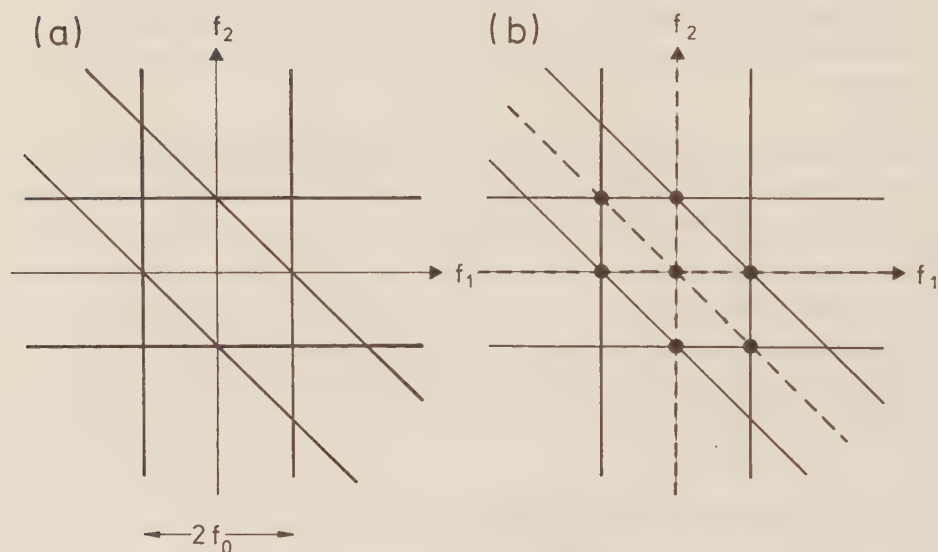


Fig. 16 Konstruktion des Bispektrums eines Kosinus ohne (a) und mit Untergrund (b) (aus Ref. /V9/).

Nun addieren wir einen konstanten Untergrund zum cos-Signal $I(t)$, oder entsprechend eine Delta-Linie zum Signalspektrum

$\tilde{I}(f)$. Im Bispektrum $\tilde{I}^{(3)}$ erscheint diese Delta-Linie dreimal: auf der f_1 und f_2 -Achse und auf deren Winkelhalbierenden, wie es die gestrichelten Linien in Fig. 16b andeuten. Die dicken Punkte in Fig. 16b zeigen wo das Bispektrum ungleich Null ist.

Was man aus diesem Beispiel lernt, ist, daß eine Messung der Tripel-Korrelation sehr empfindlich sein kann um einen Untergrund im Signal zu detektieren. Will man hingegen die Tripel-Korrelation gegen Schwankungen im Untergrund unempfindlich machen, so ist es günstig zu einer Definition mit "zero-mean" Variablen überzugehen (siehe Abschnitt 3.1. und Ref. /3/).

Man kann Tripel-Korrelationen verwenden um schwache Nicht-linearitäten in Apparaten oder Systemen zu detektieren. Angenommen, wir schicken ein reines cosinus-Signal ohne Untergrund in ein System. Die entsprechende Tripel-Korrelation wäre dann null. Sobald aber das System, in Folge von Nichtlinearitäten, mit der Grundfrequenz und mit der Zweiten Harmonischen antwortet, wird die Triple-Korrelation ungleich null sein. Dies ist aufgrund einer graphischen Konstruktion des Bispektrums offensichtlich, ähnlich wie in Fig. 16. Oder mit anderen Worten:

- (i) das Bispektrum ist nur dann ungleich null, falls das Signal gleichzeitig Wellenkomponenten mit den Frequenzen f_1, f_2 und $-(f_1+f_2)$ besitzt.

Diese Bedingung (i) entspricht den Auswahlregeln für nicht-lineare Wellen-Wellen-Wechselwirkungen: $f_1+f_2 = f_3$ und $\underline{k}_1+\underline{k}_2 = \underline{k}_3$, wobei $\underline{k}_1, \underline{k}_2, \underline{k}_3$ Wellenvektoren sind.

Wie die formale Ähnlichkeit der physikalischen und mathematischen Gesetze vermuten läßt, sind Bispektren ein geeignetes Mittel zur Untersuchung nichtlinearer Effekte (44-46). Im Falle stochastischer Signale gibt es noch eine weitere Bedingung, die die Frequenzkomponenten erfüllen müssen:

- (ii) zwischen den Frequenzen f_1, f_2 und f_3 muß (zumindest partielle) Phasenkohärenz bestehen.

Oder mit anderen Worten, falls die Wellen an den Frequenzen f_1, f_2 und f_3 durch statistisch unabhängige Prozesse entstehen, so werden sie auch durch statistisch unabhängige Phasen charakterisiert sein. Als Folge wird der Erwartungswert des Bispektrums $\tilde{I}^{(3)}(f_1, f_2)$ null werden. Diese Eigenschaft macht das Bispektrum rauschunempfindlich. Zum Beispiel konnte T. Sato unter extrem verrauschten Bedingungen akustische Abbildungen erzielen /36-38/.

Der Einfluß von Rauschen auf die Tripel-Korrelation soll nun etwas genauer beschrieben werden. In vielen Fällen sind folgende Annahmen sinnvoll: das Rauschen $N(t)$ ist signalunabhängig, additiv und stationär. Für dieses Modell erhält man folgende Gleichungen:

$$I(t) + N(t) = J(t) \quad (19)$$

$$\langle J^{(3)}(t_1, t_2) \rangle =$$

$$\begin{aligned} I^{(3)}(t_1, t_2) + \langle N \rangle \cdot [I^{(2)}(t_1) + I^{(2)}(t_2) + I^{(2)}(t_2 - t_1)] + \\ + \int I(t) dt \cdot [\langle N^{(2)}(t_1) + N^{(2)}(t_2) + N^{(2)}(t_2 - t_1) \rangle] + \\ \langle N^{(3)}(t_1, t_2) \rangle \end{aligned} \quad (20)$$

Unter günstigen Bedingungen verschwinden alle rauschbehafteten Terme in Gl. (20). Falls das Rauschen den Mittelwert null hat $\langle N \rangle = 0$, tragen die Korrelationen zweiter Ordnung $I^{(2)}$ nicht zur Tripel-Korrelation $\langle J^{(3)} \rangle$ des verrauschten Signals $J(t)$ bei. Hat das Signal selbst den Mittelwert null, so verlieren die Autokorrelationen $\langle N^{(2)} \rangle$ des Rauschens ihre Wirkung. Der verbleibende Term $\langle N^{(3)} \rangle$ ist vernachlässigbar, falls die Wahrscheinlichkeitsdichte $p(N)$ des Rauschens symmetrisch ist $p(N) = p(-N)$, oder zumindest nicht "schief": $\int N^3 p(N) dN = 0$ ist. Im Fourierraum bedeutet $\langle N^{(3)}(t_1, t_2) \rangle = 0$, daß $\langle \tilde{N}^{(3)}(f_1, f_2) \rangle = \langle \tilde{N}(f_1) \tilde{N}(f_2) \tilde{N}(-f_1 - f_2) \rangle = 0$; da Rauschen an den Frequenzen f_1, f_2 und $(-f_1 - f_2)$ gewöhnlich unkorreliert ist, erwartet man meist $\langle \tilde{N}^{(3)} \rangle = 0$. Durch Subtraktion eines geeigneten Untergrunds von $J(t)$ ist es immer möglich, zumindest einen der Rauschterme in Gl. (20) zu eliminieren.

Der Einfluß von Photonenrauschen auf Tripel-Korrelationen wurde bereits in Abschnitt 2.3.2. diskutiert.

3.3. Rekonstruktion eines Signals aus seiner Tripel-Korrelation

"Für ein reelles Signal $I(t)$ endlicher Ausdehnung läßt sich $I(t)$ (bis auf eine Verschiebung) eindeutig aus seiner Tripel-Korrelation $I^{(3)}(t_1, t_2)$ rekonstruieren!"

Wir konnten diese Aussage mathematisch beweisen, für komplexe Signale $I(t)$ verallgemeinern und wir fanden Computer-Algorithmen zur Signalrekonstruktion. Die entwickelten Algorithmen sind für die Speckle-Masking-Methode (Kapitel 2) und einige weitere Projekte dieser Arbeit nützlich (Kapitel 4-6).

Wir diskutieren zunächst prinzipielle Einschränkungen für eine Rückgewinnung von $I(t)$ aus $I^{(3)}(t_1, t_2)$. Die Diskussion erfolgt in der Fourierdomäne.

3.3.1. Prinzipielle Grenzen

Verwendet man die Definition des Bispektrums in Gl. (2), so erkennt man, daß das Bispektrum blind gegen einen Faktor $\exp[\beta f]$ im Spektrum ist, d.h.

für $\tilde{I}_F(f) = \tilde{I}(f) \cdot \exp[\beta \cdot f]$ β : komplexe Konstante

$$\begin{aligned} \text{gilt} \quad \tilde{I}_F^{(3)}(f_1, f_2) &= \tilde{I}(f_1) \cdot \tilde{I}(f_2) \cdot \tilde{I}(-f_1 - f_2) \\ &\quad \exp[\beta (f_1 + f_2 - f_1 - f_2)] \\ &= \tilde{I}^{(3)}(f_1, f_2) \end{aligned} \tag{21}$$

Viele Beispiele gegen eine eindeutige Signalrekonstruktion aus Bispektren lassen sich auf Gl. (21) zurückführen. Gleichung (21) enthält auch den Spezialfall, daß ein linearer Phasenfaktor im Spektrum das Bispektrum nicht beeinflusst. Das bedeutet, daß die Tripel-Korrelation nicht zwischen $I(t)$ und $I(t-t_0)$ unterscheiden kann.

Eine andere Klasse von Funktionen, die sich nicht aus der Tripel-Korrelation rekonstruieren lassen, sind die, deren "Schiefheit" (skewness) null ist. Die Tripel-Korrelation ist dann null, wie oben schon diskutiert wurde.

In der Bildverarbeitung sind die verarbeiteten Signale meist endlich ausgedehnt und positiv. Diese beiden Einschränkungen genügen für eine Signalrekonstruktion, die bis auf eine Verschiebung eindeutig ist.

3.3.2. Eine plausible Erklärung

Zunächst soll anhand einer Graphik plausibel gemacht werden, daß für endlich ausgedehntes $I(t)$,

$$I^{(3)}(t_1, t_2) = \int I(t)I(t+t_1)I(t+t_2)dt$$

alles über $I(t)$ weiß. Zu diesem Zwecke wählen wir t_1 so, daß $I(t)$ und $I(t+t_1)$ nur in einem sehr kleinen, delta-förmigen Gebiet überlappen (siehe Fig. 17). Als Folge wird die Tripel-Korrelation im Prinzip zum gesuchten Signal

$$I^{(3)}(t_1, t_2) = \int \delta(t-t_0)I(t+t_2) \approx I(t_0+t_2).$$

Genauere Details und Anwendung dieses Prinzips finden sich in Ref. (V6).

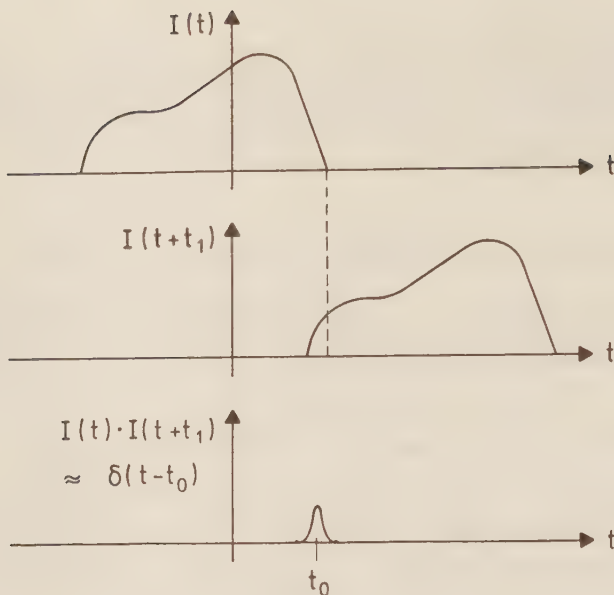


Fig. 17 Signalrekonstruktion aus Tripel-Korrelationen - eine graphische Erklärung (aus Ref. /V9/).

3.3.3. Ein mathematischer Beweis

Ein etwas stichhaltigerer Beweis der Behauptung, daß sich ein Signal fast eindeutig aus der Tripel-Korrelation gewinnen läßt, kann mit Hilfe von Analytischen Funktionen geführt werden /V8/. Es soll nun skizziert werden.

Für ein Signal $I(t)$ endlicher Ausdehnung, läßt sich das Signalspektrum $\tilde{I}(f)$ analytisch fortsetzen, indem man f zu einer komplexen Variablen $z = z' + iz''$ erweitert (siehe zum Beispiel Ref. /75,76/). Die Analytische Fortsetzung $\tilde{I}(z)$ ist

durch ihre komplexen Nullstellen z_n bestimmt und läßt sich als Hadamard-Produkt schreiben

$$\tilde{I}(z) = \exp(\alpha + \beta z) \prod_n (z - z_n) \exp(z/z_n) \quad (22)$$

Auch das Bispektrum läßt sich analytisch fortsetzen, man findet:

$$\tilde{I}^{(3)}(z_1, z_2) = \tilde{I}(z_1) \tilde{I}(z_2) \tilde{I}(-z_1 - z_2) \quad (23)$$

Setzt man Gl. (22) in Gl. (23) ein, so erhält man

$$\tilde{I}^{(3)}(z_1, z_2) = \exp(3\alpha) \prod_n (z_1 - z_n)(z_2 - z_n)(-z_1 - z_2 - z_n) \quad (24)$$

Aus der Kenntnis von $\tilde{I}^{(3)}(z_1, z_2)$ und dessen Nullstellen in (z_1, z_2) kann man die komplexen Nullstellen z_n von $\tilde{I}(z)$ gewinnen. Kennt man die z_n , so kennt man im Prinzip $\tilde{I}(z)$, damit auch $\tilde{I}(f)$ und folglich auch $I(t)$. Die genaue technische Formulierung des Beweises /V8/ zeigt, daß sich für den allgemeinen Fall eines komplexen $I(t)$, $\tilde{I}(f)$ rekonstruieren läßt und zwar bis auf einen exponentiellen Faktor $\exp[\alpha + \beta f]$, wobei β eine komplexe Konstante ist, und α die Werte $0, 2\pi i \cdot 1/3, 2\pi i \cdot 2/3$ annimmt. Für reelle $I(t)$ ist $\tilde{I}(f)$ bis auf den Faktor $\exp(2\pi i b f)$ (mit b : reell) bekannt.

3.3.4. Rekursive Signalrekonstruktion

In diesem Abschnitt wird eine Rekonstruktions-Methode diskutiert, die es ermöglicht, das komplexe Signalspektrum $\tilde{I}(f)$ aus dem Bispektrum $\tilde{I}^{(3)}(f_1, f_2)$ zu berechnen. Der Einfachheit halber, nehmen wir ein reelles Signal $I(t)$ an, d.h.

$I(t) = I^*(t)$ und folglich ist $\tilde{I}(f)$ hermitisch: $\tilde{I}(f) = \tilde{I}^*(-f)$. Die Verallgemeinerung auf komplexe $I(t)$ wird in Ref. /V8/ diskutiert.

Aus praktischen Gründen wird der Rekonstruktions-Algorithmus auf eine diskrete Version $\tilde{I}_{p,q}^{(3)}$ des Bispektrums angewandt:

$$\begin{aligned}\tilde{I}_{p,q}^{(3)} &= \tilde{I}^{(3)}(p\Delta f_1, q\Delta f_2) \\ &= \tilde{I}(p\Delta f_1)\tilde{I}(q\Delta f_2)\tilde{I}(-p\Delta f_1 - q\Delta f_2) \\ &= \tilde{I}_p \cdot \tilde{I}_q \cdot \tilde{I}_{-p-q}\end{aligned}\quad (25)$$

wobei $\Delta f_1 = \Delta f_2$ ein geeigneter Abtastabstand in der Bispektrums-Ebene ist und wobei $\tilde{I}_p$, $\tilde{I}_q$ und $\tilde{I}_{-p-q}$ gesampelte Fourier-transformierte des Signals darstellen. Falls $I(t)$ endlich ausgedehnt ist, gibt es immer einen geeigneten Abtastschritt Δf .

Das Ziel ist, das (komplexe) Spektrum $\tilde{I}_p = |\tilde{I}_p| \exp[i\varphi_p]$ aus dem Bispektrum $\tilde{I}_{p,q}^{(3)} = |\tilde{I}_{p,q}^{(3)}| \exp[i\varphi_{p,q}^{(3)}]$ zu gewinnen. Da wir den Modulus und die Phase von $\tilde{I}_p$ getrennt rekonstruieren, spalten wir Gl. (25) in zwei Gleichungen auf. Eine bezüglich der Moduli und eine bezüglich der Phasen:

$$|\tilde{I}_{p,q}^{(3)}| = |\tilde{I}_p \cdot \tilde{I}_q \cdot \tilde{I}_{-p-q}| \quad (26)$$

$$\exp[i\varphi_{p,q}^{(3)}] = \exp[i(\varphi_p + \varphi_q + \varphi_{-p-q})] \quad (27)$$

Zunächst soll die Signalphase rekonstruiert werden. Mit der Substitution $r = p+q$ lautet Gl. (27)

$$\exp[i\varphi_r] = \exp[i(\varphi_{r-q} + \varphi_q - \varphi_{r-q,q}^{(3)})] \quad (28)$$

wobei $\varphi_p = -\varphi_{-p}$ verwendet wurde.

Zur Vereinfachung beschränken wir uns zunächst auf eine einzige Zeile $q = 1$ des diskreten Bispektrums. Gl. (28) ergibt dann

$$\exp[i\varphi_r] = \exp[i(\varphi_1 + \varphi_{r-1} - \varphi_{r-1,1}^{(3)})] \quad (29)$$

$\varphi_0 = 0$ und $\varphi_1 = 0$, $r = 2 \dots N$,

wobei wir uns auf positive Indices $r > 0$ beschränken, da $\tilde{I}_p$ hermitisch ist und daher $\varphi_r = -\varphi_{-r}$; insbesondere gilt $\varphi_0 = -\varphi_0 = 0$. Der Phasenwert φ_1 wurde willkürlich auf null gesetzt, was letztendlich bedeutet, daß wir auf die Kenntnis der absoluten Lage des Objektes verzichten. Um dies zu erklären, starten wir die Rekursion in Gl. (29) mit $r = 1$. Sowohl φ_0 wie auch $\varphi_{0,0}^{(3)}$ ist null, da $\tilde{I}_p$ und $\tilde{I}_{p,q}^{(3)}$ hermitisch ist – damit ist φ_1 unbestimmt. Die weiteren Rekursionsschritte ($r = 2, 3 \dots$) liefern

$$\varphi_2 = 2\varphi_1 - \varphi_{1,1}^{(3)}$$

$$\varphi_3 = \varphi_2 + \varphi_1 - \varphi_{2,1}^{(3)} = 3\varphi_1 - \varphi_{1,1}^{(3)} - \varphi_{2,1}^{(3)}$$

$$\varphi_r = r\varphi_1 - \varphi_{1,1}^{(3)} - \varphi_{2,1}^{(3)} - \dots - \varphi_{r-1,1}^{(3)}$$

Anscheinend kann die Fourierphase φ_r des Signals aus den Phasen des Bispektrums bestimmt werden und zwar bis auf einen linearen Term $r \cdot \varphi_1$. Diese kleine Einschränkung ist nicht überraschend, da das Bispektrum blind gegen einen

linearen Phasenfaktor in $\tilde{I}_p$ ist (siehe Abschnitt 3.3.1.). Oder, mit anderen Worten, das Bispektrum kennt die absolute Position des Signals $I(t)$ nicht.

Die Rekursion in Gl. (29) verwendet nur die Phaseninformation die in einer einzigen Zeile ($q = 1$) des Signal-Bispektrums $\tilde{I}_{p,q}^{(3)}$ enthalten ist. Für praktische Anwendungen ist es aus Gründen der Rauschunterdrückung wichtig, weitere Phaseninformation aus dem Bispektrum zu gewinnen und zu mitteln. Zu diesem Zwecke setzt man in Gl. (28) $q = 1, 2, 3, \dots$ und findet folgende Rekursionsformel:

$$\exp[i\varphi_r] = \text{const} \sum_{0 < q < r/2} \exp[i(\varphi_{r-q} + \varphi_q - \varphi_{r-q,q}^{(3)})]$$

$$\varphi_0 = \varphi_1 = 0, \quad r = 2 \dots N, \quad (30)$$

wobei der Index q so ausgewählt ist, daß alle Phaseninformation eines Oktanten zur Rekursion beiträgt. Dies ist wegen der inneren Symmetrie des Bispektrums sinnvoll (siehe Gl. (15), (16)).

Der nächste Schritt der Signalrekonstruktion ist die Gewinnung des Fouriermodulus $|\tilde{I}_p|$. Zu diesem Zwecke wählt man in Gl. (26) den Index $q = 0$ (oder entsprechend $p = 0$, oder $q = -p$) und erhält

$$|\tilde{I}_p| = |\tilde{I}_p| \cdot |\tilde{I}_0| \cdot |\tilde{I}_{-p}|$$

$$= |\tilde{I}_p|^2 \cdot \text{const}, \quad (31)$$

wobei verwendet wird, daß für reelle Signale $\tilde{I}_p = \tilde{I}_{-p}^*$ und daß $\tilde{I}_0 = \text{const}$. Natürlich läßt sich auch für die Modulusrekonstruktion weitere Information aus dem Bispektrum gewinnen,

ähnlich wie im Falle der Phasenberechnungen. Auch die Reihenfolge, in der die Bispektrumswerte in der Rekursion verwendet werden, kann dem konkreten Problem angepaßt werden. Die genauen technischen Details der Rekursion sind in Ref. /V8/ dokumentiert. Im nächsten Kapitel wird die rauschunempfindlichkeit der hier diskutierten Rekursionen demonstriert.

K A P I T E L 4

MESSUNG ULTRAKURZER LASERPULSE -

EIN VORSCHLAG

Vor einigen Jahren gelang es Laserpulse zu erzeugen die viel kürzer als eine Pikosekunde sind. Seitdem hat sich ein neues Forschungsgebiet entwickelt, um physikalische Phänomene mit einer Zeitauflösung von Femtosekunden zu untersuchen. Inzwischen erzielten Experimentatoren Pulsdauern, die sich den theoretischen Grenzen nähern. Der Weltrekord wird augenblicklich von einem Puls mit 30 Femtosekunden Länge gehalten /77/. Das entspricht, bei einer Wellenlänge von 600 nm, ungefähr 15 Wellenlänge.

Kein Detektor ist schnell genug, um einen solchen ultrakurzen Puls direkt zu messen. Es gibt jedoch Methoden um die Autokorrelation der Pulsintensität zu messen (siehe zum Beispiel /77-78/). Leider ist die Autokorrelation symmetrisch und so bleibt jede Asymmetrie des zugrundeliegenden Pulses verborgen. An dieser Stelle kann man von einer Tripel-Korrelations-Analyse profitieren und die echte Pulsform, statt deren Autokorrelation messen.

Die vorgeschlagene Methode /V10/ besteht im wesentlichen aus zwei Schritten:

(i) Messung der Tripel-Korrelation

$$I^{(3)}(\Delta t, \Delta t') = \int I(t) \cdot I(t + \Delta t) \cdot I(t + \Delta t') dt \quad (32)$$

der Pulsintensität.

(ii) Rekonstruktion der Pulsform $I(t)$ aus der Tripel-Korrelation $I^{(3)}(\Delta t, \Delta t')$ des Pulses.

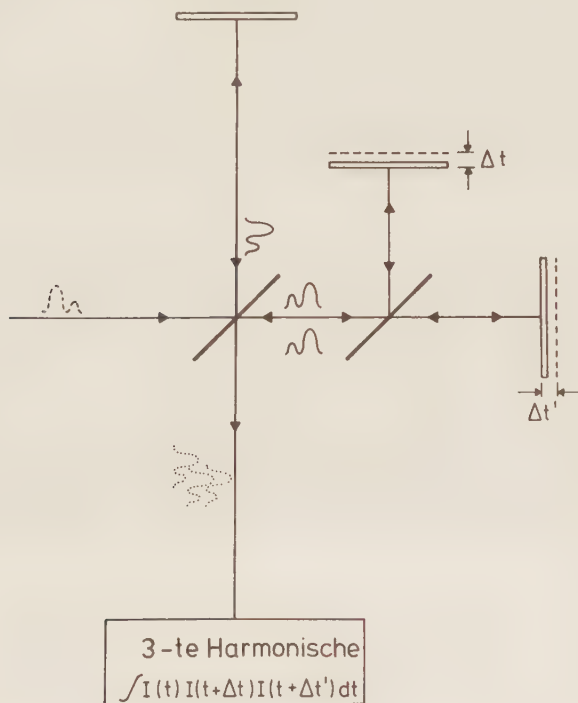


Fig. 18 Gamos Tripel-Intensitäts-Interferometer zur Messung der Tripel-Korrelation ultrakurzer Laserpulse.

Schritt (i) läßt sich mit einer Modifikation des Tripel-Intensitäts-Interferometers von Gamo /25,26/ realisieren (Fig. 18).

Zunächst wird der Fall einer Folge identischer Laserpulse betrachtet. Die drei Arme des Interferometers erzeugen gegenseitig verzögerte Pulszüge $I(t)$, $I(t+\Delta t)$ und $I(t+\Delta t')$. Nun mischt man die Pulszüge in einem nichtlinearen Kristall. Die Dritte Harmonische Frequenz enthält die Intensitäts-Tripel-Korrelation $I^{(3)}(\Delta t, \Delta t')$. Gleichzeitig werden im Kristall auch Intensitäts-Korrelationen zweiter Ordnung erzeugt, die kompensiert werden können.

Um Schritt (ii) durchzuführen wird zunächst $I^{(3)}(\Delta t, \Delta t')$ fouriertransformiert. Aus dem so erhaltenen Bispektrum läßt sich die Pulsform $I(t)$ eindeutig zurückgewinnen, wie im letzten Abschnitt gezeigt wurde.

Die Computer-Simulation in Fig. 19 illustriert, daß eine gute Pulsrekonstruktion auch im Falle sehr verrauschter Rohdaten $I^{(3)}(\Delta t, \Delta t')$ möglich ist.

Auch die Pulsform eines einzigen Laserpulses kann man messen. Man erzeugt dazu die nötigen Laufzeitunterschiede an verschiedenen Ortskoordinaten und mißt mit einem 2-dimensionalen Detektorfeld gleichzeitig $I^{(3)}(\Delta t, \Delta t')$ für viele Δt und $\Delta t'$.

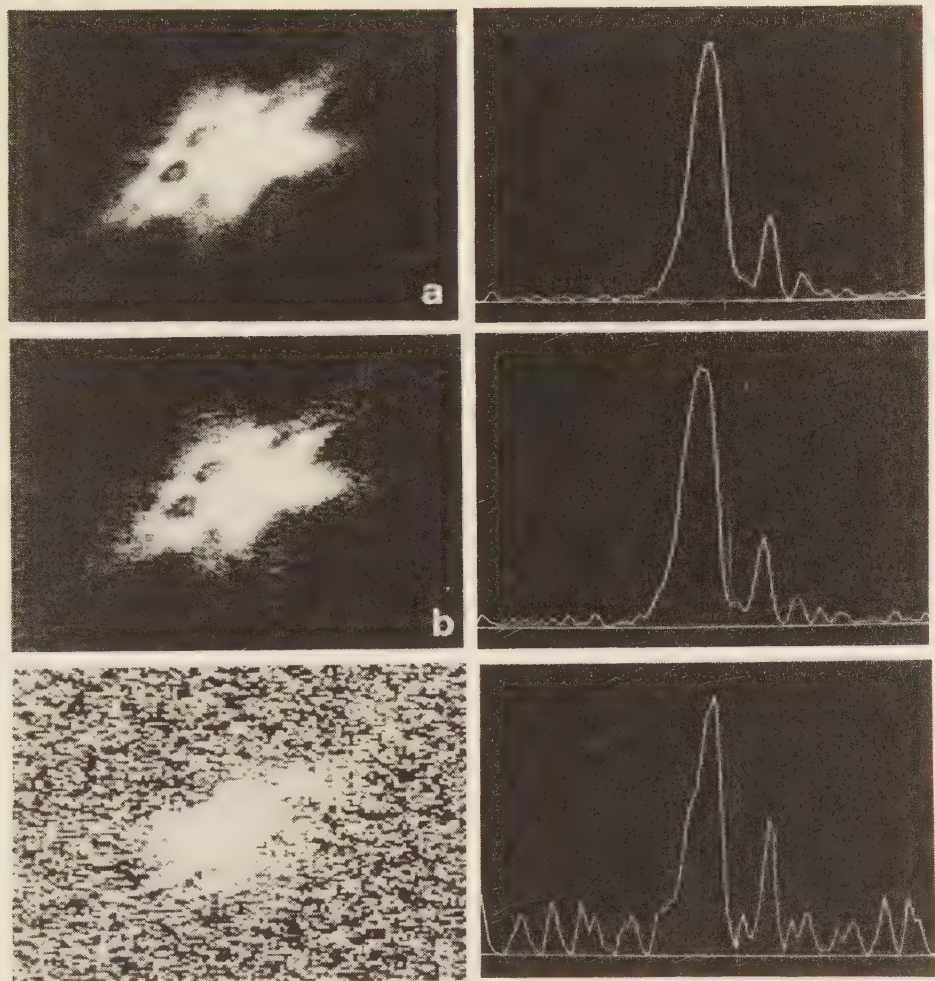


Fig. 19 Signalrekonstruktion aus Tripel-Korrelationen.
 Die wahre Pulsform $I(t)$ ultrakurzer Laserpulse (rechte Spalte), läßt sich aus der Impuls-Tripel-Korrelation $I^{(3)}(\Delta t, \Delta t')$ (linke Spalte) gewinnen. Das Signal-zu-Rausch-Verhältnis in der Tripel-Korrelation war (a) 4, (b) 2, (c) 0,4 (siehe Ref. /V10/ für genauere Details).

K A P I T E L 5

ANDERE PROJEKTE MIT TRIPEL-KORRELATIONEN UND BISPEKTREN

Wie die Projekte in den letzten Kapiteln zeigen, sind es im wesentlichen drei Eigenschaften die eine Signal- und Bildverarbeitung mit Tripel-Korrelationen und Bispektren sinnvoll und erfolgreich machen, nämlich:

- (i) Es gibt Fälle, in denen die Tripel-Korrelation $I^{(3)}$ meßbar ist, das Signal I selbst jedoch nicht.
- (ii) Die Tripel-Korrelation $I^{(3)}$ ist gegen Gaußisches Rauschen oft weniger empfindlich als das Signal I oder seine Autokorrelation $I^{(2)}$.
- (iii) Hat man die Wahl, entweder $I^{(2)}$ oder $I^{(3)}$ zu messen, so ist $I^{(3)}$ vorzuziehen weil $I^{(3)}$ mehr Information als $I^{(2)}$ enthält. Zum Beispiel enthält $I^{(3)}$ Modulus- und Phaseninformation über das Signalspektrum $\tilde{I}$.

Diese Eigenschaften sind die Motivation für die meisten, aus der Literatur bekannten, Tripel-Projekte /21-53/. Einige davon sollen jetzt skizziert werden.

5.1 Anwendungen

5.1.1 Gamos Tripel-Intensitäts-Interferometer und verwandte Projekte

Einer der ersten Vorschläge um Tripel-Korrelationen in einem physikalischen Experiment zu verwenden ist unseres Wissens Gamos Tripel-Intensitäts-Interferometer /25,26/. Gamos Interferometer ist eine Erweiterung des bekannten Hanbury Brown und Twiss Intensitäts-Interferometers, das für astronomische Zwecke entwickelt wurde.

Im Hanbury Brown und Twiss Interferometer wird das Licht eines astronomischen Objektes mit zwei räumlich getrennten Photodetektoren P_1 und P_2 gemessen. Bestimmt man den Korrelationskoeffizienten zwischen den beiden Photoströmen $I_1(t)$ und $I_2(t)$, so findet man nach Übergang zur "zero-mean"-Variablen $\Delta I(t) = I(t) - \langle I(t) \rangle$:

$$\begin{aligned}\langle \Delta I_1(t) \cdot \Delta I_2(t) \rangle &= \text{konst} \left| \langle V_1(t) \cdot V_2^*(t) \rangle \right|^2 \\ &= \text{konst} \left| J(x_{12}) \right|^2\end{aligned}\tag{33}$$

Wobei $V_1(t)$ und $V_2(t)$ die Wellenamplituden sind, die auf die beiden Detektoren treffen, und wobei $J(x_{12})$ die Kohärenzfunktion für den Detektorabstand x_{12} beschreibt. Nach van Cittert und Zernike sind die Kohärenzfunktion und die Intensitätsverteilung eines selbstleuchtenden Objektes Fourierpaare /79/. Im Experiment von Hanbury Brown wird der Detektorabstand variiert und man erhält so den Modulus der Kohärenzfunktion (Gl. 33), oder gleichbedeutend, die Autokorrelation der Objektintensität.

Gamos Vorschlag ist, einen dritten Photodetektor in das Intensitäts-Interferometer einzubauen (Fig. 20) und den Tripel-Korrelations-Koeffizienten dreier fluktuierenden Photoströme zu messen. In Formeln bedeutet das /25/

$$\begin{aligned}
 \langle \Delta I_1(t) \cdot \Delta I_2(t) \cdot \Delta I_3(t) \rangle &= \\
 &= \text{konst Re} \{ J(x_{12}) \cdot J(x_{23}) \cdot J(x_{13}) \} \\
 &= \text{konst} \cdot | J(x_{12}) \cdot J(x_{23}) \cdot J(x_{13}) | \\
 &\quad \cos [\varphi(x_{12}) \cdot \varphi(x_{23}) \cdot \varphi(x_{13})] \quad (34)
 \end{aligned}$$

Variiert man in die Detektorabstände x_{12} , x_{23} , x_{31} , so läßt sich die Phase der Kohärenzfunktion, bis auf ihr Vorzeichen und einen linearen Phasenfaktor bestimmen. Diese Mehrdeutigkeit entspricht einer Drehung des Objektes um 180° und einer unbekannten Verschiebung.

Fast fünfzehn Jahre nachdem Gamo seine Idee veröffentlicht hatte, zeigte T. Sato und Mitarbeiter die Anwendbarkeit des Konzeptes in einem Modellexperiment /35/.

Ähnlich wie das Hanbury Brown-Twiss Interferometer läßt sich auch Michelsons stellares Interferometer zu einer Tripel-Version erweitern. Eine solche Erweiterung schlug Jennison für die Radioastronomie vor. Sein Tripel-Interferometer mißt drei Amplituden-Kreuzkorrelationen zweiter Ordnung. Hierdurch erhält man eine redundante Messung des Streifenkontrastes. Die gewonnene Redundanz erlaubt es zum Beispiel Störungen durch atmosphärische Turbulenzen weitgehend zu eliminieren /27-29/. Rogstad übertrug dieses Konzept auf die optische Interferometrie /30/.

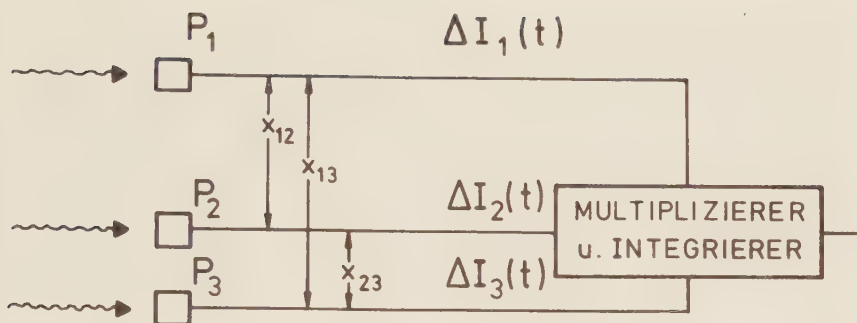


Fig. 20 Gamos stellares Tripel-Intensitäts-Interferometer.

Gamo erkannte eine weitere Anwendung des Tripel-Intensitäts-Interferometers, nämlich die Spektralanalyse von Lichtstrahlen /26/. In diesem Falle betrachtet man die zeitliche Korrelation der fluktuierenden Photoströme, statt der örtlichen Korrelation wie beim stellaren Interferometer. Die zeitliche Intensitäts-Korrelation zweiter Ordnung liefert die Autokorrelation der Spektrallinie. Übergang zur Korrelation dritter Ordnung liefert die echte Form der Spektrallinie, bis auf die absolute Frequenzlage und eine Spiegelung.

Die Tripel-Korrelation ist unempfindlich gegen Gaußisches Rauschen. Dieser Aspekt hat unseres Wissens in der Photonen-Korrelationsspektroskopie /80/ bislang wenig Anwendung gefunden und könnte bei schwachen Signalen und starkem Rauschen eine Photonen-Korrelations-Spektroskopie dritter Ordnung sinnvoll machen.

5.1.2 Satos Geschwindigkeitsmessungen mit Bispektren

Maschinen- oder Motorenlärm enthält harmonische Frequenzkomponenten, die mit der Drehzahl oder den Eigenfrequenzen der Maschine verknüpft sind. Ein typisches Leistungsspektrum für Maschinenlärm ist in Fig. 21a skizziert. Eine Bewegung der Maschine relativ zum Beobachter läßt sich durch die Dopplerverschiebung der signifikanten Frequenzkomponenten im Leistungsspektrum detektieren.

Auch das Bispektrum des Maschinengeräusches enthält signifikante Komponenten. Folglich kann auch deren Dopplerverschiebung als Maß für die Geschwindigkeit der Maschine dienen (siehe Fig. 21b).

Der Vorteil der Bispektralanalyse /43/ wird deutlich, wenn starkes Rauschen die Maschine umgibt. Aufgrund des Zentralen Grenzwertsatzes wird das Rauschen annähernd Gaußische Statistik haben, wenn die verschiedenen Rauschquellen statistisch entkoppelt sind. Das Bispektrum für Gaußisches Rauschen ist null - das Leistungsspektrum hingegen nicht. Als Folge können in der Bispektrumsebene Dopplerverschiebungen nachgewiesen werden, die für das Leistungsspektrum nicht mehr beobachtbar sind (Fig. 22).

Die Rauschunempfindlichkeit des Bispektrums nutzen T. Sato und seine Mitarbeiter auch bei Laser-Doppler- /39-41/ und anderen Geschwindigkeitsmessungen aus /42,43/.

5.1.3 Holographie mit Bispektren

Sasaki, Sato und Mitarbeiter entwickelten mehrere Verfahren um mit Bispektren (akustische) Abbildungen zu erzielen /35-38/.

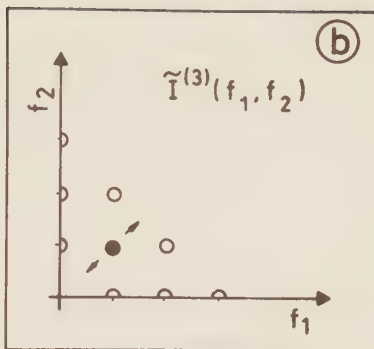
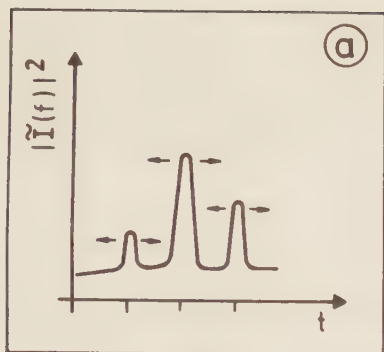


Fig. 21 Geschwindigkeitsmessung durch Dopplerverschiebung von Spektren und Bispektren.
Leistungsspektrum (a) und Bispektrum (b) eines Maschinengeräusches (siehe Ref. /42,43/).

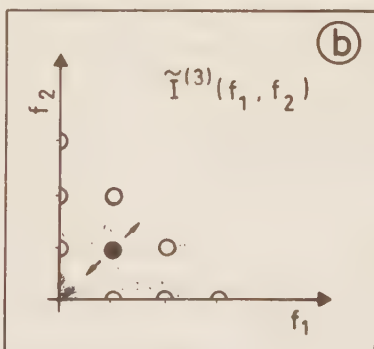
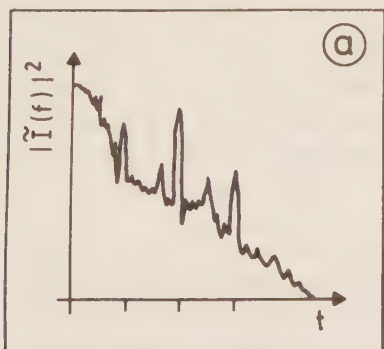


Fig. 22 Doppler-Geschwindigkeitsmessung bei starkem Gaußischen Hintergrundrauschen; (a) Leistungsspektrum, (b) Bispektrum (siehe Ref. /42,43/).

Einige Eigenschaften dieser Systeme sind:

- (i) Eine Abbildung ist auch für passive Systeme möglich, d.h. nur die akustischen Signale, die der Gegenstand selbst aussendet, werden im Abbildungssystem verwendet. Es werden also keine akustischen Signale zum abzubildenden Objekt gesandt.
- (ii) Die Abbildungen sind holographisch, d.h. die Phase der Welle ist meßbar.
- (iii) Die Abbildungen sind unempfindlich gegen Gaußisches Rauschen.

5.1.4 Detektion von Nichtlinearitäten mit Bispektr

Die Wellenbewegung in tiefen Gewässern läßt sich näherungsweise als sinus-förmige Amplitudenverteilung beschreiben. Das Bispektrum eines reinen Sinus ist null, wie die grafische Konstruktion des Bispektrums in Abschnitt 3.2 zeigte. In Küstennähe, oder an Untiefen, beginnen sich die Wellen zu brechen. Oder mit anderen Worten, aufgrund schwacher Nichtlinearitäten addieren sich zur Grundfrequenz höhere Harmonische. Jetzt ist das Bispektrum ungleich null und detektiert so die Untiefen, oder Unebenheiten im Ozeanboden /46/.

Es gibt einige weitere Anwendungen, in denen Bispektr

Es gibt einige weitere Anwendungen, in denen Bispektr verwendet wurden um Nichtlinearitäten zu detektieren. Zum Beispiel konnten T. Sato und Mitarbeiter einsetzenden Verschleiß an Maschinen mit einer Bispektralanalyse leicht detektieren /31,32/. Was das Ohr des Fachmanns als unrundes Maschinen-geräusch erfährt, äußert sich in starken "Peaks" im Bispektrum. Das legt die Hypothese nahe, daß auch das Gehirn eine Tripel-Korrelationsanalyse der akustischen Signale durchführen kann.

Kim und Powers verwendeten Bispektren um nichtlineare Wellen-Wellen-Wechselwirkungen schwach turbulenter Plasmaschwingungen zu untersuchen /44,45/. Sie konnten zum Beispiel zwischen spontan angeregten Frequenzmoden und phasengekoppelten Moden unterscheiden, welche durch Nichtlinearitäten verursacht wurden. Das Leistungsspektrum ist blind gegenüber Phasenkopplung.

5.1.5 Weitere Anwendungen

Abschließend möchte ich zwei weitere Tripel-Projekte in der Bildverarbeitung erwähnen, die an diesem Institut durchgeführt wurden /50-53/. Zum Beispiel lassen sich bedingte Bewegungswege einer großen Zahl von Bakterien mit Hilfe Tripel-Korrelationen messen /51/. Im speziellen bedeutet das eine Antwort auf die Frage: "Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß eine Bakterie, die während der Zeit Δt zwei 'Schritte' nach rechts gewandert ist, in der nächsten Zeitperiode $\Delta t'$ einen Schritt nach links läuft!" Solche Fragestellungen sind in der Biologie interessant.

Das zweite Beispiel ist C. Thums Messung bedingter Wahrscheinlichkeiten für benachbarte Punkte in Grautonbildern /52,53/.

5.2 Methoden zur Berechnung von Tripel-Korrelationen

In den letzten Jahren haben mehrere Autoren Methoden zur Messung von Tripel-Korrelationen und Bispektren vorgeschlagen /54-63/. Die Mehrzahl dieser Methoden beruht auf der Akustooptik (AO).

Ein typisches Beispiel für einen AO-Tripel-Korrelator ist in Fig. 23 gezeigt. Die Kreuz-Tripel-Korrelation wird folgendermaßen erzeugt. Das Signal $I_s(t)$ moduliert eine Lichtquelle. Das modulierte Licht fällt auf eine fortschreitende akustooptische Welle $I_y(t+y/c)$ und danach auf eine weitere akustooptische Welle $I_x(t+x/c)$, die sich in orthogonaler Richtung bewegt. Ein 2-dimensionaler zeitintegrierender Detektor liefert die Tripel-Korrelation. Neben den zeitlich integrierenden Tripel-Korrelatoren, gibt es auch räumlich integrierende Korrelatoren.

Der Tripel-Korrelator in Fig. (23) läßt sich leicht zu einem Bispektrum-Analysator umrüsten /60/. Man benötigt dazu im wesentlichen eine Linse zur Fouriertransformation und eine Referenzwelle, um komplexe Werte aufzeichnen zu können.

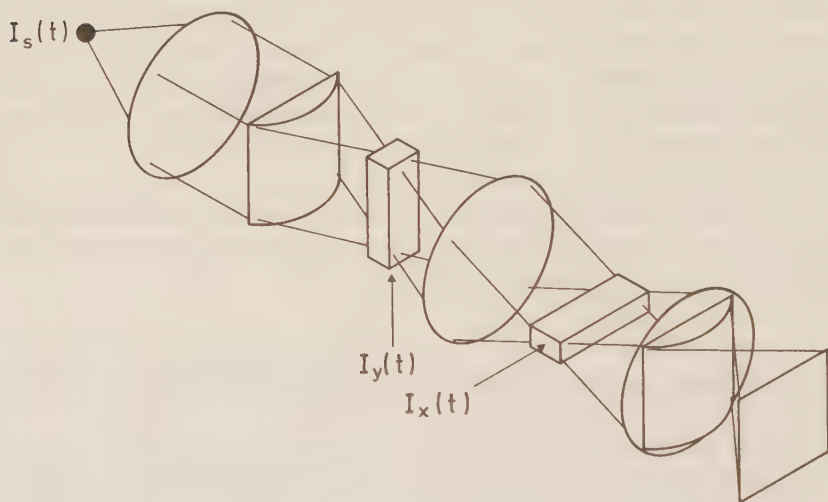


Fig. 23 Ein akustooptischer Tripel-Korrelator

K A P I T E L 6

ZWEI PROJEKTSKIZZEN

6.1 Verschiebungsinvariante Abbildung bei extrem schwachen Lichtintensitäten - eine Projektskizze

Der Einsatz von Bildverstärkern ermöglicht es, Gegenstände aufzunehmen, die in einer Sekunde nur wenige Photonen emittieren oder reflektieren. Bei kurzen Belichtungszeiten ($\sim$ Sekunden) bestehen die Aufnahmen dann nur aus einzelnen Photonen-Ereignissen. Wünscht man ein echtes Bild mit kontinuierlicher Helligkeitsverteilung, so wie es das Auge bei hoher Lichtintensität wahrnimmt, dann sind Belichtungszeiten von mehreren Stunden nötig. Bewegt sich das Objekt während dieser Zeit relativ zur Aufnahmeoptik, so erhält man ein bewegungsunschärpes Bild (Fig.24). Diese Bewegungsunschärfe soll nun, trotz des Photonenrauschens, vermieden werden.

Das Problem läßt sich durch Verarbeitung der Daten mit Hilfe der Tripel-Korrelation lösen. Wir skizzieren, der Anschaulichkeit wegen, erst den Fall hoher Lichtintensität. Die Verarbeitungsschritte sind:

- 1) Berechnung der Tripel-Korrelation von jedem Kurzzeit-Einzelbild $I_n(\underline{x})$:

$$I_n^{(3)}(\underline{x}_1, \underline{x}_2) = \int I_n(\underline{x}) \cdot I_n(\underline{x} + \underline{x}_1) \cdot I_n(\underline{x} + \underline{x}_2) d\underline{x}$$

- 2) Summation der Tripel-Korrelationen:

$$I^{(3)}(\underline{x}_1, \underline{x}_2) = \sum_{n=1}^N I_n^{(3)}(\underline{x}_1, \underline{x}_2)$$

Dieser Schritt zerstört keine Information über Objektdetails, da die Tripel-Korrelation nahezu vollständige Information über das Objekt enthält (Kap. 3).

- 3) Rekonstruktion des Objektes $I(\underline{x})$ aus der gemittelten Tripel-Korrelation $I^{(3)}(\underline{x}_1, \underline{x}_2)$ (Kap. 3).

Schritt (3) ist bis auf die absolute Lage des bewegten Objektes eindeutig möglich.

Die Verallgemeinerung dieser Verarbeitungsschritte auf photonenverrauschte Rohdaten $D_n(\underline{x})$ ist einfach. Schritt (1) und (2) bleiben unverändert und liefern die mittlere Tripel-Korrelation $D^{(3)}(\underline{x}_1, \underline{x}_2)$. Es folgt der Verarbeitungsschritt

- 2') Berechnung von $I^{(3)}(\underline{x}_1, \underline{x}_2)$ aus $D^{(3)}(\underline{x}_1, \underline{x}_2)$. Hierzu muß ein frequenzabhängiger Photonenuntergrund kompensiert werden, ähnlich wie es in Abschnitt 2.3.2 diskutiert wurde.

Aus $I^{(3)}(\underline{x}_1, \underline{x}_2)$ läßt sich dann das unbekannte Objekt $I(\underline{x})$ rekonstruieren.



Fig. 24 Entstehung der Langzeitbelichtung eines Leuchtturmes bei bewegter See. (Links die Aufnahmen bei hoher Lichtintensität; rechts die bei schwacher Lichtintensität)

6.2 Spektrogramme höherer Ordnung von musikalischen Tönen

Die menschliche Stimme oder ein musikalischer Ton lassen sich als Luftdruck $I(t)$ als Funktion der Zeit beschreiben. Es ist sinnvoll das selbe Signal in der Fourierebene als Leistungsspektrum zu beschreiben

$$|\tilde{I}(f)|^2 = \tilde{I}(f) \tilde{I}(f)^* \quad (37)$$

Für einen musikalischen Ton zeigt das Leistungsspektrum zum Beispiel wie sich Grundton und Obertöne zusammensetzen, um die typische Klangfarbe des Tones zu erzeugen (siehe Fig. 25). Jedoch das Leistungsspektrum ist phasenblind und liefert keine Information über die relative Phasenbeziehung zwischen Tönen und Obertönen. Solche Phasenbeziehungen können bei der Qualitätsuntersuchung von Musikinstrumenten interessant sein.

Schon Helmholtz war bekannt, daß die Klangfarbe eines Tones nicht von der Phasenbeziehung zwischen den Obertönen abhängt. Jedoch das menschliche Ohr kann es wahrnehmen, wenn sich die Phasenbeziehungen zwischen den Obertönen zeitlich ändern. Um solche zeitlichen Veränderungen zu erfassen verwendet man das Kurzzeit-Spektrum

$$\tilde{I}_T(f) = \int I(t) \cdot W(t-\tau) \exp [-2\pi i f t] dt \quad (38)$$

Wobei $W(t)$ eine Fensterfunktion ist. Die Funktion $\tilde{I}_T$ nennt man auch komplexes Spektrogramm. Den Betrag von $\tilde{I}_T$ nennt man das Spektrogramm von $I(t)$.

Um zeitlich veränderliche Phaseneffekte zu untersuchen erweitern wir nun das Konzept der Spektrogramme auf Spektrogramme höherer Ordnung. Zum Beispiel ist das komplexe Bi-Spektrogramm



Fig. 25 Spektrogramm eines Flötentones



Fig. 26 Bi-Spektrogramm des Flötentones in Fig. 25.
Die Phase der komplexen Werte ist als Intensität dargestellt; außerdem ist $f_1 = f_2$ gewählt.

definiert als

$$\tilde{I}_T^{(3)}(f_1, f_2) = \tilde{I}_T(f_1) \cdot \tilde{I}_T(f_2) \cdot \tilde{I}_T(-f_1 - f_2) \quad (39)$$

Das Bi-Spektrogramm zeigt die wechselseitigen Amplituden und Phasenbeziehungen zwischen den Frequenzkomponenten f_1 , f_2 und $(-f_1, -f_2)$. Speziell für $f_1 = f_2$ erhält man zum Beispiel (siehe Fig. 26)

$$|\tilde{I}_T^{(3)}(f_1, f_1)| = |\tilde{I}_T(f_1)|^2 \cdot |\tilde{I}_T(2f_1)| \quad (40)$$

$$\varphi_T^{(3)}(f_1, f_1) = 2\varphi_T(f_1) - \varphi_T(2f_1) \quad (41)$$

Der Vorteil des Bi-Spektrogramms ist, daß die erhaltene Phaseninformation nicht durch Form und Lage der Fensterfunktion $W(t)$ beeinflusst ist. Solche Fenstereffekte machen die Interpretation des komplexen Spektrogramms schwierig. Das komplexe Spektrogramm liefert absolute Phasenwerte, das Bi-Spektrogramm hingegen Phasendifferenzen zwischen Tönen und Obertönen.

Erste Untersuchungen an Flötentönen zeigten, daß es in Flöten phasengekoppelte und phasenungekoppelte Obertonkombinationen gibt. Der Grad der Phasenkopplung ist von der Qualität des Instrumentes und vom Spieler abhängig. Beim Überblasen der Flöte wird die Phasenbeziehung zwischen den Obertönen chaotisch. Aber das sind nur erste Ergebnisse einer sicherlich interessanten Untersuchung.

SPECKLE-MASKING - DETAILS UND AUSBLICK

1. Kompensation der Speckle-Masking-Transferfunktion

Zur Bildrekonstruktion in der Speckle-Masking-Methode benötigt man das Objekt-Bispektrum $\tilde{O}^{(3)}(\underline{u}_1, \underline{u}_2)$ das man aus (Gl.8)

$$\langle \tilde{I}_n^{(3)}(\underline{u}_1, \underline{u}_2) \rangle = \tilde{O}^{(3)}(\underline{u}_1, \underline{u}_2) \cdot \langle \tilde{P}_n^{(3)}(\underline{u}_1, \underline{u}_2) \rangle \quad (A1)$$

erhält, nachdem die Transferfunktion $\langle \tilde{P}_n^{(3)} \rangle$ kompensiert wurde. Fouriertransformation liefert die Objekt-Tripel-Korrelation $O^{(3)}(\underline{x}_1, \underline{x}_2)$. Aus $O^{(3)}$ läßt sich das Objekt O rekonstruieren.

Zur Bildrekonstruktion sehr einfacher Objekte (wie z.B. Doppelsterne) genügt ein 2-dimensionaler Ausschnitt $O^{(3)}(\underline{x}_1 = \underline{s}, \underline{x}) = O(\underline{x})$ aus der 4-dimensionalen Objekt-Tripel-Korrelation $O^{(3)}(\underline{x}_1, \underline{x}_2)$ (siehe Abschnitt 2.3 und 3.3.2 und Ref. /V6/). Wenn es gelänge die Transferfunktion $\langle \tilde{P}_n^{(3)} \rangle$ in diesem 2-dimensionalen Ortsraum zu kompensieren (also $\underline{x}_1 = \underline{s}$ in der Tripel-Korrelation), so könnte man viel Rechenaufwand sparen. Dies ist tatsächlich möglich, wie folgende Gleichung zeigt (siehe Ref. /V6/).

$$\begin{aligned} \langle I_n^{(3)}(\underline{x}_1 = \underline{s}, \underline{x}_2) - I_{nmm}^{(3)}(\underline{x}_1 = \underline{s}, \underline{x}_2) - I_{nmn}^{(3)}(\underline{x}_1 = \underline{s}, \underline{x}_2) \\ - I_{nnm}^{(3)}(\underline{x}_1 = \underline{s}, \underline{x}_2) + 2I_{nmk}^{(3)}(\underline{x}_1 = \underline{s}, \underline{x}_2) \rangle \\ \approx O^{(3)}(\underline{x}_1 = \underline{s}, \underline{x}_2) , \end{aligned} \quad (A2)$$

wobei unterschiedliche Indizes n, m, k bedeuten, daß statistisch unabhängige Speckle-Interferogramme des Objektes verarbeitet werden. In der Ableitung von Gl.(A2) wurde vorausgesetzt, daß die komplexe Lichtamplitude in der Teleskopöffnung eine Gaußsche Zufallsvariable ist, für die das Reed Theorem gilt. Dieses Gaußsche Modell ist eine akzeptable Näherung für die Lichtstreuung in der turbulenten Erdatmosphäre. Das zeigen auch die Bildrekonstruktionen in Fig. 9-11, die nach Gl.(A2) gewonnen wurden. Trotzdem, die Gültigkeit der Gaußschen Annahme muß für jeden verarbeiteten Datensatz überprüft werden. Die formalen Einzelheiten der Herleitung von Gl. (A2) werden in Ref./V6/ gegeben.

Die Kompensation der Speckle-Masking-Transferfunktion mit Gl.(A2) bringt erfahrungsgemäß eine Zeitersparnis um ungefähr einen Faktor 100. Ein weiterer Vorteil ist, daß man die Transferfunktion nicht in einem getrennten Experiment bestimmen muß.

2. Einfluß des Photonenrauschens

In diesem Anhang wird die Herleitung erläutert, die zum frequenzabhängigen Photonenuntergrund in Gl.(10) führt. Außerdem wird ein Ausdruck für das Signal-zu-Rausch-Verhältnis (SNR) der Speckle-Masking-Methode gegeben und mit dem SNR der Speckle-Interferometrie /70-74/ verglichen. Eine ausführlichere Diskussion findet sich in Ref./V6/.

Zunächst werden die photonenzählenden Rohdaten (Gl.9) fourier-transformiert

$$\begin{aligned}\tilde{D}_n(\underline{u}) &= \int \sum_{j=1}^N \delta(\underline{x}-\underline{x}_j) \cdot \exp[-2\pi i \underline{u} \underline{x}] d\underline{x} \\ &= \sum_{j=1}^N \exp[-2\pi i \underline{u} \underline{x}_j] .\end{aligned}\tag{A3}$$

Natürlich ändern sich die Photonen-Koordinaten $\underline{x}_j = \underline{x}_j^{(n)}$ und die Gesamtzahl der Photonen N von Bild zu Bild. Berechnung des Bisppektrums ergibt

$$\begin{aligned}\tilde{D}_n^{(3)}(\underline{u}_1, \underline{u}_2) &= \tilde{D}_n(\underline{u}_1) \cdot \tilde{D}_n(\underline{u}_2) \cdot \tilde{D}_n(-\underline{u}_1 - \underline{u}_2) \\ &= \sum_{j,k,l} \exp[-2\pi i(\underline{u}_1(\underline{x}_j - \underline{x}_l) + \underline{u}_2(\underline{x}_k - \underline{x}_l))] \\ &\quad (A4)\end{aligned}$$

Nun ist der Erwartungswert $E[.]$ zu bilden. Dabei müssen drei statistische Prozesse berücksichtigt werden /70,71/:

- (i) Der Photonennachweis; die Wahrscheinlichkeitsdichte ein Photon am Ort $\underline{x}_j$ nachzuweisen ist proportional zur klassischen Intensität

$$P(\underline{x}_j) = c \cdot I(\underline{x}_j), \quad (A5)$$

wobei die konstante c von den Aufnahmebedingungen abhängt.

- (ii) Die Gesamtzahl der nachgewiesenen Photonen. Dieser Prozeß wird durch eine Poissonverteilung beschrieben.
- (iii) Schließlich wird über die Statistik von $I(\underline{x})$ gemittelt (siehe Ref./70,71/).

Zunächst wird der Erwartungswert (i) bezüglich der Photonen-Koordinaten gebildet

$$\begin{aligned}E_{jkl}[\tilde{D}_n^{(3)}(\underline{u}_1, \underline{u}_2)] &= \\ \sum_{j,k,l} E_{jkl}[\exp[-2\pi i(\underline{u}_1(\underline{x}_j - \underline{x}_l) + \underline{u}_2(\underline{x}_k - \underline{x}_l))] &] \quad (A6)\end{aligned}$$

Um den Erwartungswert in Gl. (A6) zu berechnen sammelt man

N	Terme, in denen $j = k = 1$	[a]
$N(N-1)$	Terme, in denen $j \neq k = 1$	[b]
$N(N-1)$	Terme, in denen $j = k \neq 1$	[c]
$N(N-1)$	Terme, in denen $j \neq 1 = k$	[d]
$N(N-1)(N-2)$	Terme, in denen $j \neq k \neq 1$	[e]

Verwendet man die Wahrscheinlichkeitsdichte $P(\underline{x}_j)$ in Gl. (A5) und beachtet man, daß für $j \neq k$, $\underline{x}_j$ und $\underline{x}_k$ unabhängige Zufallsvariablen sind, d.h.

$$P(\underline{x}_j, \underline{x}_k) = P(\underline{x}_j) \cdot P(\underline{x}_k) \\ = c^2 \cdot I(\underline{x}_j) \cdot I(\underline{x}_k),$$

dann erhält man

$$E_{jkl}[\tilde{D}_n^{(3)}(\underline{u}_1, \underline{u}_2)] = N + \\ + c^2 N(N-1) \cdot [|\tilde{I}_n(\underline{u}_1)|^2 + |\tilde{I}_n(\underline{u}_2)|^2 + |\tilde{I}_n(-\underline{u}_1 - \underline{u}_2)|^2] \\ + c^3 N(N-1)(N-2) \tilde{I}_n^{(3)}(\underline{u}_1, \underline{u}_2) \quad (A7)$$

Es folgt die Mittelung (ii) über die Poissonstatistik der Zahl N der detektierten Photonen. Hierfür gilt

$$E_N[N(N-1)(N-2) \dots (N-r+1)] = \bar{N}_I^r \quad (A7')$$

wobei $\bar{N}_I$ den bedingten Mittelwert von N bedeutet (wenn $I(\underline{x})$ bekannt ist).

Zusammen mit der Mittelung über die Statistik von $I(\underline{x})$ erhält

man (siehe Ref. /V6/ für genauere Zwischenschritte) :

$$\begin{aligned}
 E[\tilde{D}_n^{(3)}(\underline{u}_1, \underline{u}_2)] &= \bar{N} + \\
 &+ \bar{N}^2 \cdot \langle |\tilde{i}_n(\underline{u}_1)|^2 + |\tilde{i}_n(\underline{u}_2)|^2 + |\tilde{i}_n(-\underline{u}_1 - \underline{u}_2)|^2 \rangle \\
 &+ \bar{N}^3 \cdot \langle \tilde{i}_n^{(3)}(\underline{u}_1, \underline{u}_2) \rangle , \quad (A8)
 \end{aligned}$$

wobei $\bar{N}$ die mittlere Photonenzahl pro Speckle-Interferogramm bedeutet und die Kleinbuchstaben $\tilde{i}_n, \tilde{i}_n^{(3)}$ normalisierte Spektren und Bispektren beschreiben ($\tilde{i}(0)=1=\tilde{i}^{(3)}(0,0)$).

Gleichung (A8) enthält das zur Bildrekonstruktion nötige Bispektrum $\langle \tilde{i}_n^{(3)}(\underline{u}_1, \underline{u}_2) \rangle$, aber auch einen unerwünschten Photonenuntergrund. Um diesen Photonenuntergrund zu vermeiden berechnen wir aus jedem Speckle-Interferogramm D_n die Größe

$$\begin{aligned}
 \tilde{Q}_n^{(3)}(\underline{u}_1, \underline{u}_2) &= \tilde{D}_n^{(3)}(\underline{u}_1, \underline{u}_2) \\
 &+ [|\tilde{D}_n(\underline{u}_1)|^2 + |\tilde{D}_n(\underline{u}_2)|^2 + |\tilde{D}_n(-\underline{u}_1 - \underline{u}_2)|^2 \\
 &- 2N] \quad (A9)
 \end{aligned}$$

Bildet man nun wie oben den Erwartungswert über $\tilde{Q}_n^{(3)}$ statt über $\tilde{D}_n^{(3)}$ so findet man:

$$E[\tilde{Q}_n^{(3)}(\underline{u}_1, \underline{u}_2)] = \bar{N}^3 \cdot \langle \tilde{i}_n^{(3)}(\underline{u}_1, \underline{u}_2) \rangle . \quad (A10)$$

Man erhält also das gewünschte Bispektrum ohne Photonenuntergrund.

Um das Signal-zu-Rausch-Verhältnis (SNR) der Speckle-Masking-Methode abzuschätzen, diskutieren wir zunächst das SNR im

Bispektrum, bei der Verarbeitung von Z Speckle-Interferogrammen. Es sei

$$\begin{aligned} \text{SNR}_{\text{Bi}} &= \frac{E[\tilde{Q}_n^{(3)}]}{\sigma_Q / \sqrt{Z}} \\ &= \frac{\bar{N}^3 \langle \tilde{i}_n^{(3)}(\underline{u}_1, \underline{u}_2) \rangle}{\sigma_Q / \sqrt{Z}}, \end{aligned} \quad (\text{A11})$$

wobei σ_Q die (rms) Varianz von $\tilde{Q}_n^{(3)}$ bedeutet. Zur Bestimmung von σ_Q sind Momente sechster Ordnung zu berechnen. Diese werden nach dem selben Prinzip ausgewertet, das oben bereits zur Berechnung von $E[\tilde{Q}_n^{(3)}]$ angewandt wurde.

Wir fanden für das SNR bei der Verarbeitung von Z Speckle-Bildern /V6/

$$\begin{aligned} \text{SNR}_{\text{Bi}} &\approx \sqrt{Z} && \text{für } \bar{n} \gg 1 \\ \text{SNR}_{\text{Bi}} &\approx \sqrt{Z} \cdot \bar{n}^{3/2} \cdot \tilde{b}^{(3)}(\underline{u}_1, \underline{u}_2) \cdot \tilde{o}^{(3)}(\underline{u}_1, \underline{u}_2) && \text{für } \bar{n} \ll 1 \end{aligned} \quad (\text{A12})$$

wobei $\bar{n}$ die mittlere Photonenzahl pro Speckle bedeutet; $\tilde{b}^{(3)}$ ist die beugungsbegrenzte Bispektral-Transferfunktion des Teleskopes und $\tilde{o}^{(3)}$ ist das Objekt-Bispektrum ($\tilde{o}^{(3)}$ und $\tilde{b}^{(3)}$ sind normalisiert, d.h. $\tilde{b}^{(3)}(0,0)=1=\tilde{o}(0)$).

Zum Vergleich geben wir das SNR für das Leistungsspektrum, wie es in Speckle-Interferometrie verwendet wird /72/:

$$\begin{aligned} \text{SNR}_{\text{Lei}} &\approx \sqrt{Z} && \text{für } \bar{n} \gg 1 \\ \text{SNR}_{\text{Lei}} &\approx \sqrt{Z} \cdot \bar{n} \cdot \tilde{b}(\underline{u}) \cdot |\tilde{o}(\underline{u})|^2 && \text{für } \bar{n} \ll 1 \end{aligned} \quad (\text{A13})$$

wobei $\tilde{b}(\underline{u})$ die beugungsbegrenzte (normalisierte) Transferfunktion des Teleskops beschreibt.

Nun soll das SNR für die Speckle-Masking-Methode abgeschätzt werden. Der neue Aspekt von Speckle-Masking ist, daß man die Fourierphase des Objektes gewinnen kann, nicht nur den Modulus. Wir beschränken uns daher darauf, das SNR für die Phasenrekursion (Abschnitt 2.3.4) abzuschätzen.

Der Phasenfehler im Bispektrum läßt sich abschätzen als

$$\begin{aligned}\Delta \varphi_{Bi} &\leq \arctan \frac{\sigma}{|\langle \tilde{I}_n^2 \rangle|} \\ &= \arctan |1/\text{SNR}_{Bi}| \\ &\approx |1/\text{SNR}_{Bi}| \quad (A14)\end{aligned}$$

wobei σ die (rms) Varianz im Bispektrum ist und wobei angenommen wurde, daß genügend viele Bilder verarbeitet wurden, so daß $\text{SNR}_{Bi} \gg 1$ und damit

$$\arctan |1/\text{SNR}_{Bi}| \approx |1/\text{SNR}_{Bi}|.$$

Nun berücksichtigen wir, daß in der Phasenrekursion aus Bispektren redundante Information über die Objekt-Fourierphase gemittelt wird. Nimmt man an, daß die Speckle-Interferogramme im Mittel $\bar{n}_s$ Speckle enthalten, dann enthält das Fourierspektrum ungefähr $\bar{n}_s$ statistisch unabhängige Korrelationsgebiete. Das Bispektrum enthält etwa $\bar{n}_s^2/4$ statistisch unabhängige Korrelationsvolumen (der Faktor 4 kommt durch die innere Symmetrie des Bispektrums). Rekonstruiert man $\bar{n}_s$ Phasenwerte aus $\bar{n}_s^2/4$ Bispektrumswerten so verkleinert sich der Fehler in der Phase um einen Faktor $(\bar{n}_s/4)^{-1/2}$. Aus Gl. (A14) folgt also für den Fehler der rekonstruierten Objekt-Fourierphase

$$\Delta \varphi_{Ph} \approx 2 \cdot \bar{n}_s^{-1/2} \cdot |1/\text{SNR}_{Bi}| \quad (A15)$$

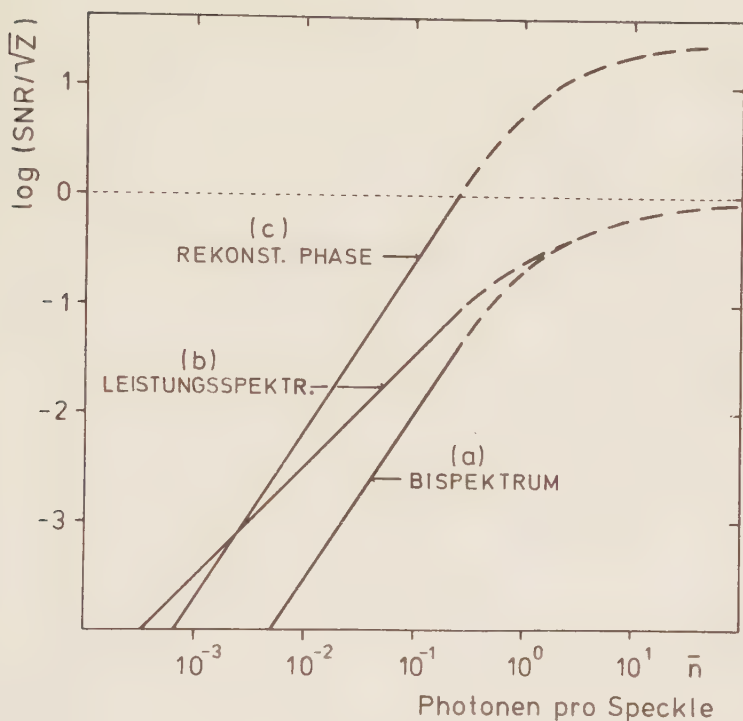


Fig. A1 Signal-zu-Rausch-Verhältnis (SNR) für verschiedene Speckle-Methoden:

- a) SNR im Bispektrum,
- b) SNR im Leistungsspektrum,
- c) SNR in der Objekt-Fourierphase, die aus dem Bispektrum gewonnen wird.

Es wurde angenommen, daß Z Speckle-Interferogramme verarbeitet wurden, daß $\tilde{o}(\underline{u})=1$, $\tilde{b}(\underline{u})=1/2=\tilde{b}^{(3)}(\underline{u}_1, \underline{u}_2)$ und daß die Rohdaten im Mittel 2500 Speckle enthalten.

Nun definieren wir ein Maß für das SNR der rekonstruierten Phase

$$\text{SNR}_{\text{Phase}} = \frac{\pi/2}{\Delta \varphi_{\text{Ph}}} \quad (\text{A16})$$

Nach der Definition in Gl. (A16) bedeutet $\text{SNR}_{\text{Phase}} = 1$, daß der mittlere Phasenfehler $\Delta \varphi_{\text{Ph}}$ gleich $\pi/2$ ist.

Verwendet man Gl. (A15) und Gl. (A16) so kann man das SNR für die Phasenrekursion abschätzen

$$\text{SNR}_{\text{Phase}} \approx \sqrt{Z} \cdot 1/2 \cdot \bar{n}_s^{1/2} \quad \text{für } \bar{n} \gg 1$$

$$\text{SNR}_{\text{Phase}} \approx \sqrt{Z} \cdot 1/2 \cdot \bar{N}^{1/2} \cdot \bar{n} \cdot |\tilde{b}(\underline{u}) \cdot \tilde{o}(\underline{u})| \quad \text{für } \bar{n} \ll 1 \quad (\text{A17})$$

wobei $\bar{N} = \bar{n} \cdot \bar{n}_s$ die mittlere Zahl der Photonen pro Speckle-Interferogramm bedeutet (und wobei $\pi/2 \approx 1$ gesetzt wurde).

Ein Vergleich von Gl. (A16) mit Gl. (A13) zeigt, daß für $\bar{N} \gg 4$ die Fourierphase, die man aus dem Bispektrum gewinnt, ein höheres SNR hat als der Fouriermodulus, wie ihn die Speckle-Interferometrie liefert (siehe Fig. A1). In allen Speckle-Interferometrie-Experimenten, die bis jetzt durchgeführt wurden, enthielten die Speckle-Interferogramme mehr als 4 Photonen im Mittel ($\bar{N} > 4$). Es müßte also möglich sein, aus den Rohdaten dieser Experimente echte Bilder zu rekonstruieren.

3. Ausblick

Die Speckle-Masking-Transferfunktion $\langle \tilde{P}_n^{(3)}(u_1, u_2) \rangle$ ist reell und positiv /V6/. Aus dieser Tatsache kann man Nutzen ziehen. Da $\langle \tilde{P}_n^{(3)} \rangle$ in Gl.(A1) reell ist, bleibt die Phase von $\tilde{O}^{(3)}$ von atmosphärischen Störungen und Teleskopaberrationen völlig unbeeinflusst. Es gilt also $\text{Phase}\{\tilde{O}^{(3)}\} = \text{Phase}\{\langle \tilde{I}_n^{(3)} \rangle\}$. Folglich kann man auch die Phase des Objektspektrums $\tilde{O}$ ohne Kompensation einer Übertragungsfunktion gewinnen (siehe Abschnitt 3.3.4). Damit entfällt einer der schwierigsten Schritte bei qualitativen Messungen. Auch die Rekonstruktion von Bildern aus der Objektphase, ohne Kenntnis des Modulus, erscheint als ein interessantes Projekt, wie erste Untersuchungen von W. Stork zeigen /67/. Daß sich ein Objekt fast immer eindeutig aus seiner Fourierphase rekonstruieren läßt, wurde erst kürzlich von Bruck und Sodin gezeigt /81/.

Eine spannende Aufgabe ist es meiner Ansicht nach, die Speckle-Masking-Methode auf sehr schwache Objekte auszudehnen (siehe auch Abschnitt 2.3.2). Schon in G. Weigelts ursprünglichen Arbeit über Speckle-Masking /7/ wurde vermutet, daß man dann die Photonenadressen mit einem Beugungsscheibchen falten muß. Das bedeutet für das Bispektrum eine Tiefpaßfilterung. Hierdurch zieht man den Photonenuntergrund (Gl.10) für Frequenzen oberhalb der Beugungsgrenze des Teleskopes auf null. Akzeptiert man einen Fehler von einem Prozent im Bispektrum, so findet man aus Gleichung (10): $\bar{N} \gtrsim 100$. Das heißt: "Enthalten die Speckle-Interferogramme im Mittel mehr als 100 Photonen, so ist die Methode, die Photonenereignisse aufzufalten, eine annehmbare Näherung, um den Photonenuntergrund zu kompensieren!" Der Vorteil hiervon ist, daß man dann in der Korrelationsebene arbeiten kann, was einen erheblichen Rechenzeitgewinn bedeuten kann (siehe Anhang 1.). Für quasi-ein-dimensionale Objekte läßt sich die Dimension der Verarbeitung auch durch Projektionen oder durch Schnitte durch die Speckle-Interferogramme reduzieren.

Literaturverzeichnis

1. A. Labeyrie: "Attainment of diffraction-limited resolution in large telescopes by Fourier analysing speckle patterns in star images", Astron. Astrophys. 6, 85 (1970)
2. A. Labeyrie: "High resolution techniques in optical astronomy", in PROGRESS IN OPTICS, Vol. XIV, E. Wolf Ed., 46 (North-Holland Amsterdam, 1976)
3. C.Y.C. Liu, A.W. Lohmann: "High resolution image formation through the turbulent atmosphere", Opt. Comm. 8, 372 (1973)
4. R.H.T. Bates, P.T. Gough, P.J. Napier: "Speckle holography", Astron. Astrophys. 22, 319 (1973)
5. P.T. Gough, R.H.T. Bates: "Speckle holography", Opt. Acta 21, 243 (1974)
6. G.P. Weigelt: "Speckle holography measurements of the stars Zeta Cancri and ADS 3358", Appl. Opt. 17, 2660 (1978)
7. G.P. Weigelt: "Modified speckle interferometry: speckle masking", Opt. Comm. 21, 55 (1977)
8. K.T. Knox, B.J. Thompson: "Recovery of images from atmospherically degraded short-exposure photographs", Astron. Journ. Lett. 193, L45 (1974)
9. R.V. Stachnik, P. Nisenson et al.: "Speckle image reconstruction of solar flares", Nature 226, 149 (1977)
10. P. Nisenson, C. Papaliolios: "Effects of photon noise on speckle image reconstruction with the Knox-Thompson algorithm", Opt. Comm. 47, 91 (1983)
11. L.N. Mertz: "Speckle imaging, photon by photon", Appl. Opt. 18, 611 (1979)
12. J.R. Fienup: "Space object imaging through the turbulent atmosphere", Optical Engin. 18, 529 (1979)
13. J.R. Fienup: "Reconstruction of an object from the modulus of its Fourier transform", Opt. Lett. 3, 27 (1978)
14. W.J. Cocke: "Computer simulation comparison of speckle image reconstruction techniques", Preprints of the Steward Observatory, No. 264, The University of Arizona, Tucson, AZ 85721, USA
15. E.K. Hege et al.: "The Steward Observatory speckle interferometry system", Opt. Acta 29, 701 (1982)
16. J.G. Walker: "Computer simulation of a method for object reconstruction from stellar speckle interferometry data", Appl. Opt. 21, 3132 (1982)

17. J.G. Walker: "Object reconstruction from turbulence degraded images", Opt. Acta 28, 1017 (1981)
 "The phase retrieval problem - a solution based on zero location by exponential apodization", Opt. Acta 28, 735 (1981)
18. F.M. Cady, R.H.T. Bates: "Speckle processing gives diffraction-limited true images from severely aberrated instruments", Opt. Lett. 5, 438 (1980)
19. A.M.J. Huizer: "A procedure to correct the images of astronomical objects for the distortions due to atmospheric turbulence", Opt. Comm. 42, 226 (1982)
20. A.H. Greenaway: "Diffraction-limited pictures from single turbulence-degraded images in astronomy", Opt. Comm. 42, 157 (1982)
21. B.J. Brames, J.C. Dainty: "Method for determining object intensity distributions in stellar speckle interferometry", J. Opt. Soc. Am. 71, 1542 (1981)
22. D.R. Brillinger: TIME SERIES ANALYSIS, Holt, Rinehardt and Winston, (New York, 1975)
23. D. Brillinger, M. Rosenblatt: "Spectral analysis of time series", B. Harris, Ed., Wiley, (New York, 1967)
24. T. Sato: Lecture note at the National Bureau of standards, Washington, D.C. (1978)
25. H. Gamo: "Phase determination of coherence functions by the intensity interferometer", p. 801 in: SYMPOSIUM ON ELECTROMAGNETIC THEORY AND ANTENNAS, Pergamon Press (1963)
26. H. Gamo: "Triple correlator of photo electric fluctuations as a spectroscopic tool", Journal Appl. Phys. 34, 875 (1963)
27. R.L. Jennison: INTRODUCTION TO RADIO ASTRONOMY, Philosophical Library, Inc. New York (1967), oder: Monthly Notices Roy. Astron. Soc. 118, 276 (1958)
28. R.C. Jennison: Monthly Notices Roy. Astron. Soc. 118, 276 (1958)
29. A.C.S. Readhead: "Radioteleskope im weltweiten Verbund", in SPEKTRUM DER WISSENSCHAFT, 8, 24 (1982)
30. D.H. Rogstad: "A technique for measuring visibility phase with an optical interferometer in the presence of atmospheric seeing", Appl. Opt. 7, 585 (1968)
31. T. Sato, K. Sasaki, Y. Nakamura: "Real-time bispectral analysis of gear noise and its application to contactless diagnosis", J. Acoust. Soc. Am. 62, 404 (1977)

32. T. Sato, K. Sasaki, M. Nonaka: "Prototype of bispectral passive imaging systems aiming machine-system diagnosis", J. Acoust. Soc. Am. 63, 1611 (1978)
33. K. Sasaki, T. Sato: "A bispectral synthesizer", J. Acoust. Soc. Am. 65, 732 (1979)
34. T. Sato, K. Sasaki, M. Kano: "Synthesizer for random signals with a kind of bispectral characteristics - a machine noise simulator", J. Acoust. Soc. Am. 69, 286 (1981)
35. T. Sato, S. Wadaka, J. Yamamoto, J. Ishij: "Imaging system using an intensity triple correlator", Appl. Opt. 17, 2047 (1978)
36. K. Sasaki, T. Sato, Y. Nakamura: "Holographic passive sonar", IEEE Transactions on sonics and ultrasonics, SU24, 193 (1977)
37. S. Wadaka, T. Sato: "Ultrasonic imaging system using a random phase mask with asymmetric thickness distribution and third-order correlation - functions analysis", J. Acoust. Soc. Am. 63, 1211 (1978)
38. T. Sato, K. Sasaki: "Bispectral holography", J. Acoust. Soc. Am. 62, 404 (1977)
39. T. Sato, O. Sasaki: "New 3-D laser doppler velocimeter using cross-bispectral analysis", Appl. Opt. 17, 3890 (1978)
40. O. Sasaki, T. Sato, T. Oda: "Laser doppler vibration measuring system using bispectral analysis", Appl. Opt. 19, 151 (1980)
41. T. Sato, T. Kishimoto, K. Sasaki: "Laser doppler particle measuring system using nonsinusoidal forced vibration and bispectral analysis", Appl. Opt. 17, 667 (1978)
42. O. Sasaki, T. Sato: "Two-dimensional velocity distribution measuring system using multiple laser beam line detectors and higher order correlation analysis", Appl. Opt. 18 3522 (1979)
43. T. Sato, K. Sasaki, M. Taketani: "Bispectral passive velocimeter of a moving noisy machine", J. Acoust. Soc. Am. 68, 1729 (1980)
44. Y.C. Kim, J.M. Beall, E.J. Powers: "Bispectrum and nonlinear wave coupling", Phys. Fluids 23, 258 (1980)

45. Y.C. Kim, E.J. Powers: "Digital bispectral analysis of self-excited fluctuation spectra", Phys. Fluids, 21, 1452 (1978)
46. K. Hasselmann, M. Munk, G. McDonald: "Bispectra of Ocean Waves", in PROCEEDINGS OF THE SYMPOSIUM ON TIME SERIES ANALYSIS, Ed. M. Rosenblatt, 125 (1962)
47. S. Chopra, L. Mandel: "Higher order correlation properties of a laser beam", Phys. Rev. Lett. 30, 60 (1972)
48. M. Corti, V. Degiorgio: "Third-order intensity correlations in laser light", Opt. Comm. 11, 1 (1974)
49. J. Blake, R. Baraket, "Three-fold photoelectron-counting statistics for Gaussian light", Opt. Comm. 16, 303 (1976)
50. A.W. Lohmann: "Chances for optical computing", Optik 65, 9 (1983)
51. A.W. Lohmann, J. Uebler, G.P. Weigelt: "Conditional motion probabilities of micro-particles", Opt. Comm. (submitted)
52. A.W. Lohmann, Ch. Thum: "Measurement of histograms of halftone images", Opt. Comm. 31, 114 (1979)
53. Ch. Thum: "Hybrid measurements of image holograms, with an application to texture discrimination", Opt. Acta 30 1665 (1983)
54. P. Kellman: "Time integrating optical processors", in: OPTICAL PROCESSING SYSTEMS (Proc. SPIE 185, 130 (1979))
55. P. Kellman: "Time integrating optical signal processing", Optical Engin. 19, 370 (1980)
56. J.D. Cohen: "Ambiguity processor architectures using one-dimensional acousto-optic transducers", SPIE 180, 134 (1979)
57. T.M. Turpin: "Spectrum analysis using optical processing", Proceedings IEEE 69, 1 (1981)
58. W.T. Rhodes: "Acousto-optic signal processing: convolution and correlation", Proceedings of the IEEE, 69, 65 (1981)
59. D. Casasent, G. Silbershatz: "Product code processing on a triple product processor", Appl. Opt. 21, 2076 (1982)
60. J.M. Florence, J.H. Song: "Real time acousto-optic bispectral processor", SPIE Proceedings 431, Paper No. 431 (1983)
61. Shih-Chun Liu: "Compact acousto-optical signal processor for real-time Fourier transformation", Appl. Opt. 21, 327 (1983)

62. M.J. Berg, J.N. Lee: "Acousto-optic signal processing theory and implementations", Optical Eng. 2, Marcel Dekker, New York (1983)
63. R.P. Bocker: "Advanced RUBIC cube processor", Appl. Opt. 22, 2401 (1983)
64. D. Korff: "Analysis of a method for obtaining near-diffraction-limited information in the presence of atmospheric turbulence", J. Opt. Soc. Am. 63, 971 (1973)
65. J.C. Dainty: "Stellar speckle interferometry", in: LASER SPECKLE AND RELATED PHENOMENA, Topics in Applied Physics 9, Ed. J.C. Dainty, Springer (1975)
66. F. Roddier: "The effect of atmospheric turbulence in optical astronomy", in PROGRESS IN OPTICS, 19 (1981)
67. W. Stork: "Speckle-Spektroskopie und Speckle-Masking-Bildrekonstruktion", Diplomarbeit, FAU Erlangen-Nürnberg, (1984)
68. G. Baier, E. Keller, G. Weigelt: "Digital photon-counting speckle interferometry", in EUSIPCO-83; SIGNAL PROCESSING: THEORIES AND APPLICATIONS (Proceedings) Ed. H.W. Schüssler (1983)
69. E.K. Hege, E.N. Hubbard, P.A. Strittmatter, S.P. Worden: Astrophys. J. 248, L1 (1981)
70. J.W. Goodman, J.F. Belsher: "Photon limited images and their restoration", ARPA Order No. 2646 (Rome Air Development Center, Griffis AFB, NY 13441), RADC-TR-76-5u (1976)
71. J.W. Goodman, J.F. Belsher: "Precompensation and post-compensation of photon limited images", ARPA Order No. 2646 (Rome Air Development Center, Griffis AFB, NY 13441), RADC-TR-382 (1976) und
"Photon limitations in imaging and image restoration", RADC-TR-77-165 (1977)
72. J.C. Dainty, A.H. Greenaway: "Estimation of spatial power spectra in speckle interferometry", J. Opt. Soc. Am. 64, 786 (1979)
73. M.G. Miller: "Noise considerations in stellar speckle interferometry", Mon. Not. R. Astron. Soc. 169, 631 (1974)
74. F. Roddier: "Signal-to-noise ratio in speckle interferometry", in IMAGING IN ASTRONOMY, AAS/SAO/OSA/SPIE Topical meeting, preprint Thc 6, Boston (1975)
75. M.A. Fiddy, G. Ross: "Analytic Fourier optics. The encoding of information by complex zeros", Optica

Acta 26, 1139 (1979) und

G. Ross et al., Optica Acta 27, 1433 (1980)

76. H. Bartelt: "Analytic functions in optics", Forschungs-berichte der Universität Erlangen-Nürnberg, 4 (1981)
77. C.V. Shank: "Measurement of ultrafast phenomena in the femto-second time domain", Science, 219, 1027 (1983)
78. J.A. Armstrong: "Measurement of picosecond laser pulse width", Appl. Phys. Lett. 10, 16 (1967)
79. M. Born, E. Wolf: PRINCIPLES OF OPTICS, Pergamon, Oxford (1965)
80. E.O. Schulz-DuBois (Ed.): PHOTON-CORRELATION TECHNIQUES IN FLUID MECHANICS, Springer Series in optical Sciences 78
81. Yu.M. Bruck, L.G.Sodin : "Speckle interferometry image reconstruction from the fourier transform phase", J.Opt.Soc.Am.A 1, 73 (1984)

Eigene Veröffentlichungen

- V1. H.M. van Noort, C.A. van't Hof, B.Wirnitzer, J. Schmidt: "The phosphorescent triplet state of aniline in a p-xylene host crystal: a study of spin-spin and spin-lattice relaxation", Chem. Phys. Lett. 81, 351 (1981).
- V2. H.M. van Noort, B.Wirnitzer and J.Schmidt: "Determination of the individual spin-lattice relaxation rates between the spin levels of phosphorescent triplet state molecules", Chem. Phys. Lett. 85, 359 (1982).
- V3. H.M. van Noort, B. Wirnitzer, J.Schmidt, J.H. van der Waals: ³E_u state of zinc porphyrin in n-alkane host crystals: temperature dependence of the electron spin resonance transitions and spin-lattice relaxation in zero-field", Mol. Phys. 45, 1259 (1982).
- V4. T.R. Koehler, H.M. van Noort, B.Wirnitzer, J.Schmidt: "The effect of methyl hydrogens on the librational motion of naphthalene molecules in a durene host crystal", Chem. Phys. Lett. 102, 95 (1983).

- V5. G.Weigelt, B.Wirnitzer:
"Image reconstruction by the speckle-masking method",
Opt. Lett. 8, 389 (1983).
- V6. A.W. Lohmann, G.Weigelt, B.Wirnitzer:
"Speckle masking in astronomy - tripel correlation theory
and applications ",
Appl. Opt. 22, 4028 (1983).
- V7. B. Wirnitzer:
"Bispectral analysis at low light levels and astronomical
speckle masking",
J. Opt. Soc. Am. A (eingereicht).
- V8. H. Bartelt, A.W. Lohmann, B. Wirnitzer:
"Amplitude and phase recovery from bispectra",
Appl. Opt. (eingereicht)
- V9. A.W. Lohmann, B. Wirnitzer:
"The tripel-correlation",
IEEE Proceedings (eingereicht).
- V10. B.Wirnitzer:
"Measurement of ultrashort laser pulse",
Opt. Commun. 48, 225 (1983).

ZUSAMMENFASSUNG

In dieser Dissertation werden neue Bild- und Signalverarbeitungsmethoden mit Tripel-Korrelationen beschrieben. Die Ergebnisse der Arbeit zeigen zwei wesentliche Aspekte. Einerseits lassen sich Tripel-Korrelationen zur astronomischen Abbildung durch die turbulente Erdatmosphäre verwenden, andererseits sind Tripel-Korrelationen ein allgemein interessantes Konzept in der Bild- und Signalverarbeitung.

Die durchbrechende Erfindung zur Abbildung durch die turbulente Atmosphäre war dem Franzosen A. Labeyrie 1970 gelungen. Er konnte aus einer Serie von Speckle-Interferogrammen die beugungstheoretisch scharfe Autokorrelation astronomischer Objekte bestimmen.

Nach Labeyries Erfindung gab es mehrere Vorschläge um aus den Speckle-Interferogrammen echte Bilder statt Autokorrelationen zu rekonstruieren. Bereits 1973 hatte A.W. Lohmann die Speckle-Holographie vorgeschlagen - eine Methode, die dann echte Bilder liefert, wenn in der Nähe des Objektes ein unauflösbarer Referenzstern steht. Fünf Jahre später konnte G. Weigelt die "Referenzstern-Bedingung" mit seiner Speckle-Masking-Methode entschärfen. Er schlug verschiedene Techniken vor, um aus den Speckle-Interferogrammen des Objektes einen künstlichen Referenzstern zu erzeugen. Eine der neuen Methoden war eine spezielle Tripel-Korrelations-Verarbeitung.

Im Sommer 1981 versuchten wir die Speckle-Masking-Methode zum ersten Mal auf astronomische Daten anzuwenden. Etwa zur gleichen Zeit konnten wir eine allgemeine Tripel-Korrelations-Theorie für die Speckle-Masking-Methode aufstellen, die for-

mal der Theorie der Speckle-Interferometrie sehr ähnlich war. Nur, daß dort wo in der Speckle-Interferometrie Autokorrelationen stehen, nun Tripel-Korrelationen standen. Jetzt konnten wir die Tripel-Korrelations-Transferfunktion für die Abbildung durch die Atmosphäre berechnen. Theorie und Experiment zeigten, daß diese für alle Frequenzen unterhalb der Beugungsgrenze größer als null ist. Wir entwickelten Methoden zur Kompensation der Speckle-Masking-Transferfunktion. Wir fanden daß man beliebige Objekte mit der Speckle-Masking-Methode verarbeiten kann und wir konnten echte beugungstheoretisch scharfe Bilder mehrerer spektroskopischer Doppelsterne rekonstruieren. Eine theoretische Überlegung zeigte, daß sich Speckle-Masking auch auf extrem schwache Objekte anwenden läßt.

Was wir aus den astronomischen Speckle-Projekten gelernt hatten war folgendes. Zum einen konnten wir durch den Übergang von Korrelationen zweiter Ordnung zu Korrelationen dritter Ordnung echte Bilder statt Autokorrelationen gewinnen. Zum anderen waren Tripel-Korrelationen offensichtlich unempfindlicher gegen Rauschen, insbesondere gegen Photonenrauschen.

Wir waren überzeugt, daß diese beiden Vorteile auch in anderen Projekten nützlich sein könnten. Deshalb beschäftigten wir uns allgemein mit dem Konzept der Tripel-Korrelation in der Signalverarbeitung. Zum Beispiel konnten wir mathematisch beweisen, daß die Tripel-Korrelation alles über das zugrundeliegende Signal weiß, falls dieses reell und endlich ausgedehnt ist. Computeralgorithmen zur Signalrekonstruktion aus Tripel-Korrelationen erwiesen sich als sehr rauschunempfindlich.

Im Juni 1983 hörten wir auf der DGAO-Tagung in Darmstadt, daß es möglich geworden war, Laserpulse mit einer Pulsdauer von

einigen Femtosekunden zu erzeugen. Es war bereits bekannt wie man die Autokorrelation der Pulsform mißt. Hier gab es eine neue Anwendung für unser Tripel-Konzept. Wir schlugen eine Methode vor, um mit einem Tripel-Intensitäts-Interferometer echte Pulsformen statt Autokorrelationen zu messen.

Zwei weitere interessante Anwendungen der Tripel-Korrelation finden sich in den Projektskizzen am Ende der Arbeit.

LEBENS LAUF

Am 28. Juni 1957 wurde ich als zweites Kind des Bauingenieurs Alois Wirnitzer und seiner Frau Cäcilia, geb. Bartl, in Nürnberg geboren. Ich bin römisch-katholischer Konfession.

Im September 1963 trat ich in die Volksschule in Nürnberg-Reichelsdorf ein. Vier Jahre später

im September 1967 wechselte ich an das mathematisch-naturwissenschaftliche Gymnasium in Schwabach über, wo ich am

25. Juni 1976 die Allgemeine Hochschulreife erlangte.

Am 1. Juli 1976 trat ich in ein Lehrverhältnis als Bauzeichner im Statikbüro der Firma Fertigbau-Neumarkt ein und legte

im März 1977 die Zwischenprüfung bei der Industrie- und Handelskammer Regensburg ab.

Im November 1976 begann ich mein Physikstudium an der Friedrich-Alexander-Universität in Erlangen.

Von August 1979 bis April 1981 verbrachte ich einen Auslandsaufenthalt am Institut von Prof. J.H. van der Waals und Prof. J. Schmidt in Leiden/Niederlande.

Am 13. Mai 1981 legte ich an der Universität in Erlangen die Diplomprüfung im Fach Physik ab.

Seit Juni 1981 arbeite ich als Wissenschaftlicher Angestellter am Institut für Angewandte Optik bei Prof. A.W. Lohmann in Erlangen.

NACHWORT

Am Ende dieser Arbeit möchte ich all denen danken, die zum Entstehen dieser Arbeit auf ihre ganz persönliche Weise beigetragen haben.

In erster Linie denke ich dabei an meine Eltern, die mir ein Studium ermöglicht haben. Einige weitere Personen möchte ich gerne namentlich nennen.

Herrn Prof. A.W. Lohmann und Herrn Prof. G. Weigelt danke ich für die Überlassung der interessanten und spannenden Arbeit. Prof. A.W. Lohmann verfolgte alle Stadien der Arbeit mit großem Interesse und unterstützte mich bei allen Problemen mit großer Fachkenntnis und Einsicht. Den astronomischen Teil der Arbeit regte Prof. G. Weigelt an. Zusammen mit seinen Mitarbeitern Dipl. Phys. G. Baier und Dipl. Phys. J. Ebersberger nahm er auch die astronomischen Speckle-Interferogramme auf. Ohne diese Aufnahmen wären die astronomischen Anwendungen in dieser Arbeit nicht möglich gewesen. Dipl. Phys. K.D. Förster war ein begeisterter und kompetenter Ratgeber bei allen Computerfragen. Bedanken möchte ich mich auch bei Dr. Reinfelder und Dipl. Phys. G. Stucke für die freundliche und hilfsbereite technische Unterstützung bei der Aufnahme von Flötentönen. Dr. H.O. Bartelt, Dr. K.H. Brenner und Dipl. Phys. N. Streibl waren stets aufgeschlossene und kritische Diskussionspartner. Prof. N. Vesperinas weckte mein Interesse an analytischer Fourieroptik. Mit viel Freude habe ich mit R. Ladebeck und W. Stork zusammengearbeitet, die Teile der Arbeit als Studenten begleiteten.

Herrn Prof. Durst möchte ich für die Übernahme des Koreferats danken.

Bedanken möchte ich mich auch bei unserer Sekretärin Frau Batz für die freundliche Zusammenarbeit, bei Frau Chuchulovius für viele technische Zeichnungen und bei Herrn Kelldorfer für fachkundige Unterstützung bei dringenden photographischen Arbeiten. Schließlich möchte ich allen danken, die durch ein gutes Arbeitsklima indirekt zum Entstehen dieser Arbeit beigetragen haben. Ein besonderer Dank gilt meiner Verlobten Ada Heemskerk, die mit großer Aufmerksamkeit einen großen Teil der Arbeit tippte und die bei vielen Fragen ein guter und geduldiger Ratgeber war.

Druck: Copy Center 2000
Obere Karlstraße 30
8520 Erlangen